Gyakorlás

Bevezetés a számításelméletbe 1
2020
7. gyakorlat

1. Határozzuk meg a $86x \equiv 4 \pmod{34}$ lineáris kongruencia megoldásait.
2. Mutassuk meg, hogy $1010^{1343} - 2$ osztható 2019-cel. (2019 prímtényezős felbontása: $2019 = 3 \cdot 673$.)
3. Határozzuk meg $78^{79^{80}}$ ötös számrendszerben felírt alakjának utolsó három számjegyét.
4. Hány olyan b egész létezik 2 és 2019 között, amelyre létezik két olyan szomszédos pozitív egész szám, hogy mindkettőnek a b alapú számrendszerbeli számjegyeinek az összege osztható 2019-cel?
5. Az alábbi C kód a bemenetként (10-es számrendszerben) kapott n pozitív egész számjegyeinek az összegét számítja ki. Tegyük fel, hogy a kód végrehajtásakor a gép az alapműveleteket az „írásbeli" összeadás, kivonás, szorzás és osztás segítségével végzi el. Döntsük el, hogy az eljárás polinomiális-e.

```
x = 0; y = 0;
while (n > 0) {
   x = floor(n/10.0);
   y = y+n-10*x;
   n = x
}
printf("Eredmény: %d", y);
```

6. Az alábbi C kód a bemenetként (10-es számrendszerben) kapott $0 < a < n$ egészek esetén az n-nek az a-nál nemnagyobb osztói közül a legnagyobbat számítja ki. Tegyük fel, hogy a kód végrehajtásakor a gép az (alsó tagozatban tanult) „írásbeli" összeadás, szorzás, stb. segítségével végzi el. Döntsük el, hogy az eljárás polinomiális-e.

```
while (n%a != 0) {
   a = a-1;
}
printf("Eredmény: %d", a);
```

7. Az e egyenes egyenletrendszere

$$x = \frac{y}{3} = \frac{z}{5},$$

az f egyenes egyenletrendszere pedig

$$\frac{x}{-2} = \frac{3-y}{6} = \frac{2-z}{10}.$$

Döntsük el, hogy e és f párhuzamosak-e. Ha igen, akkor határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely mindkettőt tartalmazza.

8. A p valós paraméter milyen értékeire lineárisan függetlenek az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli $\underline{u}$, $\underline{v}$ $\underline{w}$ vektorok?

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ p \end{pmatrix}$$

9. Tudjuk, hogy az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorrendszer lineárisan független $\mathbb{R}^n$-ben. Következik-e ebből, hogy a $2\underline{a}+\underline{b}$, $2\underline{b}+\underline{c}$, $2\underline{c}+\underline{a}$ rendszer is lineárisan független?

10. Legyenek $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ az alábbi $\mathbb{R}^4$-beli vektorok. Adjuk meg az $\langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \rangle$ generált altér összes olyan elemét, amelynek mind a négy koordinátája egyenlő.

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

11. Generátorrendszert alkotnak-e $\mathbb{R}^3$-ben az alábbi $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorok?

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \underline{d} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

12. Tegyük fel, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{10}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra teljesül, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{10}$ rendszer lineárisan független, a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{10}, \underline{w}$ rendszer viszont lineárisan összefüggő és $\underline{w} \neq \underline{0}$. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $1 \leq i \leq 10$ és olyan $\alpha \neq 0$ skalár, hogy a

$$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_i + \alpha \cdot \underline{w}, \underline{v}_{i+1}, \ldots, \underline{v}_{10}$$

rendszer lineárisan összefüggő.