Gauss-elimináció, Determináns

Bevezetés a számításelméletbe 1
2020
8. gyakorlat

Permutáció

A $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ n-tagú számsorozatot permutációnak nevezzük, ha az $1, \ldots, n$ számok mindegyikét pontosan egyszer tartalmazza. Az n-edfokú permutációk halmazát S_n jelöli.

Inverzió

A $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ permutációban a π_i és a π_j tagok inverzióban állnak, ha $i < j$, de $\pi_i > \pi_j$. A π permutáció inverziószáma az összes inverzióban álló számpárok száma. Ennek jele $I(\pi)$.

Determináns

Az $n \times n$-es A mátrix determinánsának a $\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{I(\pi)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)}$ értéket nevezzük.

1. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket!

   (a)
$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 3 \\ 3x + 5y + 10z &= 5 \\ 3x + 2y + 13z &= 2 \\ 6x + 13y + 18z &= 13 \end{aligned}$$

   (b)
$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 3 \\ 3x + 5y + 10z &= 5 \\ 3x + 2y + 13z &= 2 \\ 6x + 13y + 17z &= 13 \end{aligned}$$

   (c)
$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 3 \\ 3x + 5y + 10z &= 5 \\ 3x + 2y + 13z &= 2 \\ 6x + 13y + 17z &= 11 \end{aligned}$$

2. Döntsük el, hogy a p valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 4x_4 &= -2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 8x_4 &= -3 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 + 8x_4 &= 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + px_3 + (p^2 + p + 12)x_4 &= -6 \end{aligned}$$

3. Döntsük el, hogy a p és q valós paraméterek milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 14x_3 &= -17 \\ 2x_1 - 6x_2 - 28x_3 + p \cdot x_4 &= q - 34 \\ 3x_1 - 7x_2 - 36x_3 + 4p \cdot x_4 &= 4q - 37 \end{aligned}$$

4. (a) A p és q valós paraméterek minden értékére adjuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldásainak a számát.

(b) Ha p-nek és q-nak van olyan értéke, amelyre az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, akkor a p és q ezen értékeire adjuk meg az összes megoldást.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - 7x_4 &= 8 \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 - 28x_4 &= 23 \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 - 31x_4 &= 14 \\ 2x_1 + p \cdot x_4 &= q \end{aligned}$$

5. Oldjuk meg az alábbi n ismeretlenes és n egyenletből álló egyenletrendszereket.

(a)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n &= n \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \ldots + 2x_n &= n-1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + 3x_n &= n-2 \\ &\vdots \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n &= 1 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ &\vdots \\ x_{n-1} + x_n &= 1 \\ x_n + x_1 &= 1 \end{aligned}$$

6. Találtunk egy lapot, amin valaki a (lineáris egyenletrendszerek megoldására szolgáló) Gauss-eliminációt gyakorolta. A papír sajnos erősen megrongálódott, ezért csak a kiinduló feladat részletei és a néhány lépés után kapott lépcsős alak olvasható.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \square & 6 & \square & \square & \square \\ 2 & 4 & -4 & 7 & \square \\ 5 & 10 & \square & \square & -4 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

A kiinduló feladatban a $\square$-tel jelölt számok olvashatatlanok. (Ezek persze egymástól különböző értékek is lehetnek.) Rekonstruáljuk a lap elveszett részeit: adjuk meg a $\square$-ekben álló értékeket, majd futtassuk le a Gauss-eliminációt és adjuk meg az egyenletrendszer megoldásait.

7. Egy négyváltozós lineáris egyenletrendszerből bárhogyan is hagyunk el egy egyenletet, a kapott egyenletrendszer egyértelműen megoldható lesz. Legkevesebb hány egyenletet kell tartalmazzon az eredeti egyenletrendszer?

8. Határozzuk meg az alábbi permutációk inverziószámát!

(a) $(1, 3, 5, 7, 9, 8, 6, 4, 2)$

(b) $(n, n-1, \ldots, 2, 1)$

(c) $(21, 22, \ldots, 30, 11, 12, \ldots 20, 1, 2, \ldots, 10)$

9. Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét a determináns definíciója szerint!

$$\text{a)} \begin{vmatrix} -5 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ -4 & 9 & 0 & 7 & 3 \\ 6 & 5 & -2 & -6 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 9 & 8 & 5 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 9 & 0 & 8 & 6 \end{vmatrix}$$