Determináns

Bevezetés a számításelméletbe 1
2020
9. gyakorlat

Tétel

Legyen A egy $n \times n$-es mátrix. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

i. $\det(A) = \det(A^T)$.
ii. Ha A felső/alsó háromszögmátrix, akkor $\det(A)$ a főátlóbeli elemek szorzata.
iii. Ha A egy sora/oszlopa csupa nulla, akkor $\det(A) = 0$.
iv. Ha A egy sorát/oszlopát λ-val végigszorozzuk, akkor a determináns is λ-val szorzódik.
v. Ha A két sorát/oszlopát felcseréljük, akkor a determináns előjelet vált.
vi. Ha A két sora/oszlopa megegyezik, akkor $\det(A) = 0$.
vii. Ha A egy sorának/oszlopának λ-szorosát hozzáadjuk egy másik sorhoz/oszlophoz, akkor a determináns nem változik.

Előjeles aldetermináns

Az $n \times n$-es A mátrix a_{ij} eleméhez tartozó A_{ij} előjeles aldeterminánst úgy kapjuk, hogy az A mátrixból elhagyjuk az i-edik sorát és a j-edik oszlopát, majd a kapott $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix determinánsát megszorozzuk $(-1)^{i+j}$-nel.

Kifejtési tétel

Ha az $n \times n$-es A mátrix valamelyik sorának, vagy oszlopának minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldetermináns értékével és a kapott n darab kéttényezős szorzatot összeadjuk, akkor A determinánsának értékét kapjuk.

1. Számoljuk ki az alábbi determinánsok értékét!

(a)
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \\ -3 & 3 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 9 & -8 \\ -4 & 4 & 1 & -8 & 3 \end{vmatrix}$$

(b)
$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & 4 & 11 & -7 \\ -3 & 9 & -5 & -9 & 5 \\ 4 & -12 & 8 & 13 & -2 \\ 5 & -11 & 10 & -1 & -12 \end{vmatrix}$$

(c)
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 8 \\ 7 & 2 & 9 & 8 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

(d)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix}$$

2. Legyen A egy nem 0 determinánsú, 9×9-es mátrix, A' pedig az a mátrix, amit A-ból az első sor λ-val való szorzásával kapunk. Mennyi lehet λ értéke, ha tudjuk, hogy $\det(A') = \det(\lambda A)$?

3. A jobbra látható determináns definíció szerinti kiszámításakor

   (a) hány nemnulla szorzat keletkezik;

   (b) milyen előjelet kap az a szorzat, amelynek az egyik tényezője 3?

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

4. A 6×6-os A mátrix főátlójában és alatta minden elem 1-es, a jobb felső sarkában álló elem 2018, a mátrix összes többi (14 darab) eleme pedig 0. Határozzuk meg A determinánsát.

5. Egy $n\times n$-es A mátrixban az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében álló elem $a_{ij}=i^2j^2+1$. Határozzuk meg A determinánsát!

6. Legyen $\pi(1),\pi(2),\dots,\pi(n)$ az $1,2,\dots,n$ számok egy tetszőleges permutációja. Készítsük el az $n\times n$-es A mátrixot a következőképpen: minden $i=1,2,\dots,n$-re a mátrix i-edik sorában a $\pi(i)$-edik helyen és attól jobbra mindenhol álljon 1-es, a $\pi(i)$-edik helytől balra pedig mindenhol álljon 0. Határozzuk meg A determinánsát!

7. Egy 101×101-es A mátrixban az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében álló elem

$$a_{ij}=\begin{cases} 3^{2004}\text{-nek a } (2i+j)\text{-edik számjegye,} & \text{ha } i\cdot j \text{ páros,}\\ 0, & \text{ha } i\cdot j \text{ páratlan.}\end{cases}$$

Határozzuk meg A determinánsát!

8. Határozzuk meg $(\det A+\det B)$ értékét, ahol A és B az alábbi mátrixok.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3\\ 1 & 4 & 3 & 7\\ 3 & 9 & 13 & 19\\ 1 & 4 & 6 & 23\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 16\\ 1 & 4 & 3 & 7\\ 3 & 9 & 13 & 19\\ 1 & 4 & 6 & 23\end{pmatrix}$$

9. Egy $n\times n$-es mátrix minden eleme 1 vagy -1. Bizonyítsuk be, hogy a determinánsa osztható 2^{n-1}-nel.

10. Az alábbi A mátrixra $\det A=45653$. Mennyi $\det B$ értéke?

$$A=\begin{pmatrix} 9 & 2 & 8 & 1 & 2 & 1\\ 4 & 7 & 2 & 7 & 6 & 9\\ 6 & 4 & 3 & 1 & 8 & 3\\ 8 & 3 & 0 & 4 & 6 & 5\\ 2 & 1 & 7 & 3 & 9 & 0\\ 0 & 5 & 6 & 9 & 8 & 4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix} 9 & 4 & 8 & 2 & 2 & 2\\ 2 & 7 & 1 & 7 & 3 & 9\\ 6 & 8 & 3 & 2 & 8 & 6\\ 4 & 3 & 0 & 4 & 3 & 5\\ 2 & 2 & 7 & 6 & 9 & 0\\ 0 & 5 & 3 & 9 & 4 & 4\end{pmatrix}$$

11. Bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{vmatrix} 1849 & 1444 & 1896 & 1222\\ 1490 & 1703 & 1790 & 1526\\ 1342 & 1566 & 1541 & 1514\\ 1242 & 1552 & 1382 & 1825\end{vmatrix}\neq 0.$$

12. Számoljuk ki az alábbi determinánsok értékét a kifejtési tétel felhasználásával!

(a)

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 & 2\\ 4 & 2 & 1 & 1\\ 0 & -3 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 3 & 4\end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

13. Számítsuk ki az alábbi determinánsokat a p valós paraméter minden értékére.

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 5 & p\\ 6 & p & 4 & 0\\ 7 & 2 & p & 0\\ 6 & p & 4 & 3\end{vmatrix}\qquad \begin{vmatrix} p & 2p & p & 3p\\ 3 & 9 & 3 & 6\\ 1 & 2 & 7 & 1\\ 3 & 7 & 8 & 4\end{vmatrix}$$