

# Mátrixok inverze, rangja

## BEVEZETÉS A SZÁMÍTÁSELMÉLETBE 1

### 11. gyakorlat

2021.

#### Inverz mátrix.

Egy  $A$   $n \times n$ -es mátrix inverzén azt az  $n \times n$ -es  $A^{-1}$  mátrixot értjük, melyre  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$  teljesül.

#### Tétel.

Az  $n \times n$ -es  $A$  mátrixnak akkor és csak akkor létezik inverze, ha  $\det A \neq 0$ .

#### Definíció.

Legyen  $A$  tetszőleges mátrix. Azt mondjuk, hogy

- (i)  $A$  oszlorangja  $r$ , ha  $A$ -nak van  $r$  darab lineárisan független oszlopa, de  $r + 1$  darab már nincs;
- (ii)  $A$  sorrangja  $r$ , ha  $A$ -nak van  $r$  darab lineárisan független sora, de  $r + 1$  darab már nincs;
- (iii)  $A$  determinánsrangja  $r$ , ha  $A$ -nak van  $r \times r$ -es nemnulla determinánsú részmátrixa, de  $(r + 1) \times (r + 1)$ -es már nincs.

#### Tétel, definíció.

Tetszőleges  $A$  mátrix oszlop-, sor- és determinánsrangja egyenlő. Ezt a közös értéket nevezzük az  $A$  mátrix rangjának.

1. Számoljuk ki a következő mátrixok inverzét, amennyiben azok léteznek!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$$

2. Az  $A$  és  $B$   $n \times n$ -es mátrixokról tudjuk, hogy  $\det A \neq 0$ , valamint hogy  $AB = 0$ . Határozzuk meg a  $B$  mátrixot!
3. Határozzuk meg az alábbi  $A$  mátrix inverzének bal felső sarkában álló elemét.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. (a) Határozzuk meg azon  $p$  valós értékeket, melyekre az alábbi mátrixnak van inverze.

(b)  $p = 3$  esetén adjuk meg az inverz mátrix bal felső elemét.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & p \\ 6 & 13 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Határozzuk meg az alábbi  $A$  és  $B$  mátrixok hiányzó, betűkkel jelölt elemeit, ha tudjuk, hogy  $B = A^{-1}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -1 & x & 1 \\ y & z & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & p \\ q & 5 & r \\ s & -26 & 27 \end{pmatrix}$$

6. Számoljuk ki a következő mátrixok rangját!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Számoljuk ki a következő mátrixok rangját a  $c$ , az  $x$ , illetve a  $p$  és  $q$  valós paraméterek függvényében!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2c+7 & 3c-2 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & 9 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & p \\ 3 & 4 & q & 2 \end{pmatrix}$$

8. Egy  $4 \times 6$ -os  $A$  mátrixban az  $i$ -edik sor és a  $j$ -edik oszlop kereszteződésében álló elem  $a_{ij} = i^2 + i \cdot j$  minden  $1 \leq i \leq 4$  és  $1 \leq j \leq 6$  esetén. Határozzuk meg  $A$  rangját.

9. A  $6 \times 6$ -os  $A$  mátrixra  $r(A) = 4$ . Mutassuk meg, hogy léteznek olyan  $B$  és  $C$  mátrixok, amelyekre  $r(B) = r(C) = 2$  és  $A = B + C$ .

10. Nevezzünk egy számsorozatot félig számtaninak, ha bármely eleméről a következőre átlépve a növekmény csak két különböző értéket vehet fel. (Így például a 3, 7, 11, 12, 16, 17, 18 sorozat félig számtani.) Az  $A$  mátrixra teljesül, hogy az első három sora félig számtani sorozatot alkot (vagyis a sor elemein balról jobbra végighaladva félig számtani sorozatot kapunk), az összes többi sora pedig számtani sorozatot alkot. Mutassuk meg, hogy  $r(A) \leq 9$ .

11. Nevezzünk egy  $4 \times 4$ -es mátrixot szépen kiegészíthetőnek, ha ki tudjuk egészíteni (egy-egy plusz sorral és oszloppal)  $5 \times 5$ -ös invertálható mátrixszá. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak-e.

(a) Ha egy  $4 \times 4$ -es mátrix szépen kiegészíthető, akkor a rangja legalább 3.

(b) Ha egy  $4 \times 4$ -es mátrix rangja legalább 3, akkor a mátrix szépen kiegészíthető.

12. Legyen  $A$   $m \times n$ -es (vagyis  $m$  sorból és  $n$  oszlopból álló),  $B$  pedig  $n \times m$ -es (vagyis  $n$  sorból és  $m$  oszlopból álló) mátrix. Tegyük fel, hogy  $n < m$ . Bizonyítsuk be, hogy ekkor az  $AB$  mátrix nem invertálható.

13. Egy  $5 \times 5$ -ös  $A$  mátrixnak pontosan hat olyan  $3 \times 3$ -as részmátrixa van, ami invertálható. Mutassuk meg, hogy  $A$  nem invertálható.

14. Legyen  $A$  és  $B$   $n \times m$ -es mátrix. Bizonyítsuk be, hogy

$$r(A + B) \leq r(A) + r(B).$$

15. Legyen  $M$  egy 100 oszlopú mátrix. Jelölje  $A$  az  $M$  első 70 oszlopából álló,  $B$  pedig az  $M$  utolsó 70 oszlopából álló mátrixot. Végül jelölje  $X$  az  $M$  középső 40 oszlopából álló mátrixot. Bizonyítsuk be, hogy

$$r(A) + r(B) \geq r(M) + r(X).$$