Kongruenciák

Bevezetés a számításelméletbe 1

2. gyakorlat

2021.

Tétel.

Legyenek $a, b, c, d, m, k \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, $k \geq 1$ tetszőlegesek.
Ha $a \equiv b \pmod{m}$ és $c \equiv d \pmod{m}$, akkor az alábbiak teljesülnek.

1. $a + c \equiv b + d \pmod{m}$
2. $a - c \equiv b - d \pmod{m}$
3. $ac \equiv bd \pmod{m}$
4. $a^k \equiv b^k \pmod{m}$

Tétel.

Legyenek $a, b, c, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$ tetszőlegesek, és legyen $d = (c, m)$. Ekkor

$$ac \equiv bc \pmod{m} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}.$$

1. Milyen maradékot ad
   (a) 70^{70} 23-mal osztva;
   (b) 2021^{6543} 2022-szal osztva;
   (c) 55^{100} 48-cal osztva;
   (d) 1025^{1005} 1023-mal osztva;
   (e) $65^{63^{61}}$ 66-tal osztva?

2. Határozzuk meg az összes olyan x egész számot, amelyre az alábbi kongruenciák (külön-külön) teljesülnek.
   (a) $3x \equiv 2 \pmod{5}$
   (b) $13x \equiv 1 \pmod{28}$
   (c) $9x \equiv 1 \pmod{88}$
   (d) $32x \equiv 12 \pmod{82}$
   (e) $16x \equiv 60 \pmod{56}$
   (f) $66x \equiv 24 \pmod{36}$
   (g) $20x \equiv 7 \pmod{50}$
   (h) $8x \equiv 30 \pmod{28}$
   (i) $77x \equiv 251 \pmod{35}$

3. Egy egész szám 109-cel vett osztási maradéka 5-tel kisebb, mint a szám 18-szorosának a 109-cel vett osztási maradéka. Milyen maradékot adhat ez a szám 109-cel osztva?

4. Egy pozitív egész n szám 513-szorosának utolsó három számjegye 001. Mi az n utolsó 3 számjegye?

5. Egy egész szám 17-szerese 23 maradékot ad 65-tel osztva. Mennyi maradékot adhat a szám 130-cal osztva?

6. Mi az utolsó két számjegye az alábbi számoknak?
   (a) 2001^{2021}
   (b) $99^{77^{55}}$
   (c) 51^{151}
   (d) $\frac{51^{151}}{9}$

7. Jumurdzsák először örült a tiszti kinevezésnek, de hamarosan elment a kedve az egésztől. Mindjárt az első összecsapásban jópáran elestek a rábízott 50 fős csapatból, amit még elviselt volna, csakhogy köztük volt a pénztáros is, így már a második héten Jumurdzsáknak kellett kiosztania a zsoldot, ami cseppet sem volt egyszerű feladat. Minden alárendeltjének 26 akcse járt hetente (neki magának pedig 2 arany), de a főnökség persze nem bajlódott akcsékkal, aranyban adta át Jumurdzsáknak a csapat heti zsoldját (1 arany = 60 akcse). Fel kellett tehát váltania az aranyakat a zsold kiosztása előtt, ráadásul még a visszamaradó nyamvadt 2 akcsét sem tarthatta meg. – Így jár, aki elveszti a talizmánját – sóhajtott keserűen. Hányan estek el (a második hétig) Jumurdzsák alárendeltjei közül?

8. Határozzuk meg az összes olyan n pozitív egész számot, amelyre az alábbi kongruenciák (külön-külön) teljesülnek.

   (a) $5^n \equiv 3^n + 8 \pmod{26}$

   (b) $3n + 1 \equiv 6 \pmod{2n}$

   (c) $2n + 1 \equiv 6 \pmod{3n}$

9. Számítsuk ki képzeletben a $0, 1, 2, \ldots, 2020$ számok

   (a) 1111-szeresének (b) 1118-szorosának

   a 2021-es maradékát. Hány különböző eredményt kapunk így?

10. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a, b, c és d egész számokra

$$(a + b, c + d) \mid a^{99}c^{100} + b^{99}d^{100}.$$