

Térbeli koordinátageometria

BEVEZETÉS A SZÁMÍTÁSELMÉLETBE 1

5. gyakorlat 2021.

Az egyenes paraméteres egyenletrendszere.

Adott $\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ és $P \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$. A P ponton átmenő, \underline{v} irányvektorú egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + ta \\ y &= y_0 + tb \\ z &= z_0 + tc \end{aligned} \right\}.$$

Az egyenes egyenletrendszere.

Adott $\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ és $P \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$. Ha $a, b, c \neq 0$, akkor a P ponton átmenő, \underline{v} irányvektorú egyenes egyenletrendszere:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Ha például $c = 0$, akkor az egyenes egyenletrendszere:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x - x_0}{a} &= \frac{y - y_0}{b} \\ z &= z_0 \end{aligned} \right\}.$$

A sík egyenlete.

Adott $\underline{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ és $P \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$. A P ponton átmenő, \underline{n} normálvektorú sík egyenlete:

$$Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0.$$

1. Tartalmazza-e az $R(1; 3; 4)$ pontot az a sík, amelyet a $P(1; 7; -1)$ és a $Q(11; 9; -5)$ pontokat összekötő egyenes a P -ben merőlegesen dő?
2. Határozzuk meg az $S : 2x - 3y + 4z = 3$ sík és a következő egyenesek metszetét.
(a) $\left. \begin{aligned} x &= 11 + 2t \\ y &= -t \\ z &= 29 + 5t \end{aligned} \right\}$
(b) $\frac{x - 2}{6} = \frac{y + 1}{8} = \frac{z + 1}{3}$
3. Határozzuk meg az $x + y + z = 5$ és a $2x - y - 2z = 3$ egyenletű síkok metszetét.
4. Az e egyenesről tudjuk, hogy merőlegesen dő a $x + 2y + 3z = 6$ egyenletű síkot az $(1, 1, 1)$ pontban, az f egyenesről pedig, hogy átmegy az $(5, 2, -1)$ ponton és a $(13, 4, -5)$ ponton. Döntsük el, hogy e -nek és f -nek van-e közös pontja.
5. Döntsük el, hogy a p valós paraméter mely értékére lesz az $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z}{3}$ és az $\frac{x-3}{2} = \frac{y-p}{3} = \frac{z}{4}$ egyenletrendszerű egyeneseknek közös pontja.

6. Párhuzamos-e az

$$\frac{5x+3}{10} = \frac{4-y}{5} = \frac{5-2z}{2}$$

egyenletrendszerű egyenes a $6x+y+7z=91$, illetve az $5x+2y=79$ egyenletű síkok metszészíkjával?

7. Határozzuk meg az

$$x-4 = \frac{y+5}{4} = \frac{2-z}{3}$$

egyenletrendszerű e egyenes minden olyan P pontját, amelyre a P -t a $Q(7, 12, 4)$ ponttal összekötő f egyenes merőleges e -re.

8. Legyen adott $A(1, 0, 0)$, $B(1, -2, 4)$, és

$$e: \frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{3} = z-3.$$

Keressük meg az e egyenesen azon C pontot, melyre $|\overline{AC}| = |\overline{BC}|$ teljesül.

9. Van-e az $A(-1; -2; 1)$, $B(3; 1; 3)$ és $C(7; 6; 3)$ pontokat tartalmazó síknak olyan pontja, amely az y -tengelyre esik? Ha igen, melyik?

10. Átmegy-e az origón az az S sík, amely tartalmazza a $P(2; -1; 4)$ pontot és az $\frac{x-1}{4} = \frac{1-y}{5} = \frac{z-3}{6}$ egyenletrendszerű e egyenest?

11. Határozzuk meg a térben az $\frac{x+3}{5} = \frac{y+1}{9} = z$ egyenletrendszerű e és az $\frac{x}{4} = \frac{y+8}{6}$, $z=7$ egyenletrendszerű f egyenesek normáltranszverzálisának az egyenletrendszerét – vagyis azét az n egyenesét, amely e -t és f -et is merőlegesen metszi.

12. Legyen

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Kifejezhető-e az \underline{u} , \underline{v} és \underline{w} vektorokból az \underline{a} vektor?

(b) Kifejezhető-e az \underline{u} , \underline{v} és \underline{w} vektorokból az \underline{b} vektor?

(c) Az \mathbb{R}^4 mely vektorai fejezhetőek ki az \underline{u} és \underline{v} vektorokból?

(d) Az \mathbb{R}^4 mely vektorai fejezhetőek ki az \underline{u} , \underline{v} és \underline{w} vektorokból?

(e) Az \mathbb{R}^4 mely vektorai fejezhetőek ki az \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} és \underline{b} vektorokból?

13. Az \mathbb{R}^4 mely vektorai fejezhetőek ki az $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 1, 1, 0)$, $(0, 0, 1, 1)$ vektorokból?