Gauss-elimináció

Bevezetés a számításelméletbe 1

8. gyakorlat

2021.

1. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket!

   (a)
$$\begin{aligned} x+3y+2z &= 3\\ 3x+5y+10z &= 5\\ 3x+2y+13z &= 2\\ 6x+13y+18z &= 13 \end{aligned}$$

   (b)
$$\begin{aligned} x+3y+2z &= 3\\ 3x+5y+10z &= 5\\ 3x+2y+13z &= 2\\ 6x+13y+17z &= 13 \end{aligned}$$

   (c)
$$\begin{aligned} x+3y+2z &= 3\\ 3x+5y+10z &= 5\\ 3x+2y+13z &= 2\\ 6x+13y+17z &= 11 \end{aligned}$$

2. Legyen
$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1\\2\\1\\3 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -1\\-2\\1\\-3 \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0\\1\\6\\p \end{pmatrix}, \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 4\\8\\8\\p^2+p+12 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{w} = \begin{pmatrix} -2\\-3\\2\\-6 \end{pmatrix}.$$
   Határozzuk meg a p valós paraméter azon értékeit, melyekre $\underline{w} \in \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4 \rangle$ teljesül.

3. Legyen
$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1\\2\\3 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -3\\-6\\-7 \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -14\\-28\\-36 \end{pmatrix}, \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 0\\p\\4p \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{w} = \begin{pmatrix} -17\\q-34\\4q-37 \end{pmatrix}.$$
   Határozzuk meg a p és q valós paraméterek azon értékeit, melyekre $\underline{w} \in \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4 \rangle$ teljesül.

4. Legyen
$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2\\5\\-1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 4\\12\\-2 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 10\\23\\0 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} -2\\-1\\34 \end{pmatrix}.$$

   (a) Határozzuk meg az u és v vektorok által generált alteret.

   (b) Döntsük el, hogy bázist alkotnak-e $\mathbb{R}^3$-ban az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok, és ha igen, akkor adjuk meg ebben a bázisban $\underline{a}$ koordinátavektorát.

5. Határozzuk meg az $x+y+z=6$ és a $5x+7y-3z=6$ egyenletű síkok metszetét.

6. Oldjuk meg az alábbi n ismeretlenes és n egyenletből álló egyenletrendszereket.

   (a)

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n &= n \\ x_1+2x_2+2x_3+\ldots+2x_n &= n-1 \\ x_1+2x_2+3x_3+\ldots+3x_n &= n-2 \\ &\vdots \\ x_1+2x_2+3x_3+\ldots+nx_n &= 1 \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} x_1+x_2 &= 1 \\ x_2+x_3 &= 1 \\ &\vdots \\ x_{n-1}+x_n &= 1 \\ x_n+x_1 &= 1 \end{aligned}$$

7. Találtunk egy lapot, amin valaki a (lineáris egyenletrendszerek megoldására szolgáló) Gauss-eliminációt gyakorolta. A papír sajnos erősen megrongálódott, ezért csak a kiinduló feladat részletei és a néhány lépés után kapott lépcsős alak olvasható.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \square & 6 & \square & \square & \square \\ 2 & 4 & -4 & 7 & \square \\ 5 & 10 & \square & \square & -4 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

   A kiinduló feladatban a $\square$-tel jelölt számok olvashatatlanok. (Ezek persze egymástól különböző értékek is lehetnek.) Rekonstruáljuk a lap elveszett részeit: adjuk meg a $\square$-ekben álló értékeket, majd futtassuk le a Gauss-eliminációt és adjuk meg az egyenletrendszer megoldásait.

8. Egy négyváltozós lineáris egyenletrendszerből bárhogyan is hagyunk el egy egyenletet, a kapott egyenletrendszer egyértelműen megoldható lesz. Legkevesebb hány egyenletet kell tartalmazzon az eredeti egyenletrendszer?