Számelmélet

Bevezetés a számításelméletbe 1

1. gyakorlat

2022.

Definíció.

Legyenek $a, b, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$ tetszőlegesek. Azt mondjuk, hogy a kongruens b-vel modulo m, ha a és b azonos maradékot ad m-mel osztva. Ennek a jele $a \equiv b \pmod{m}$.

Állítás.

Legyenek $a, b, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$ tetszőlegesek. Ekkor $a \equiv b \pmod{m}$ pontosan akkor teljesül, ha $m \mid b - a$.

Néhány azonosság.

Tetszőleges a, b valós számok és $n > 1$ egész szám esetén

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Tetszőleges a, b valós számok és $n > 1$ páratlan szám esetén

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Pozitív osztók száma.

Legyen az $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$ szám kanonikus alakja $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Ekkor az n pozitív osztóinak a száma $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$.

1. Igazak-e az alábbi állítások?

   (a) $100 \equiv 43 \pmod{19}$
   (b) $70 \equiv 92 \pmod{6}$
   (c) $1234567 \equiv 7654321 \pmod{9}$
   (d) $13 \equiv -13 \pmod{5}$
   (e) $50 \equiv -17 \pmod{11}$
   (f) $-4 \equiv 22 \pmod{13}$
   (g) $21^{1000} \equiv 0 \pmod{7^{100}}$
   (h) $4321^2 \equiv 1234^2 \pmod{5555}$
   (i) $42^3 \equiv 25^3 \pmod{17}$
   (j) $81 \cdot 10^{23} \equiv 43 \cdot 10^{23} \pmod{19}$
   (k) $22^{33} + 24 \equiv 25 \pmod{11^{12}}$
   (l) $123_{⑦} \equiv 123_{⑧} \pmod{18}$
   (m) $110110101_{②} \equiv 1000101101_{②} \pmod{8}$

2. Igazak-e az alábbi állítások?

   (a) Ha $x \equiv 3 \pmod{2222}$, akkor $x \equiv 3 \pmod{1111}$.
   (b) Ha $x \equiv 3 \pmod{1111}$, akkor $x \equiv 3 \pmod{2222}$.

3. Az x egész számra $x \equiv 7 \pmod{555}$ teljesül. Igazak-e az alábbi állítások?

(a) $x + 10 \equiv 17 \pmod{555}$

(b) $3x \equiv 21 \pmod{555}$

(c) $3x \equiv 21 \pmod{1665}$

(d) $x^2 \equiv 49 \pmod{555}$

(e) $x^{100} \equiv 7^{100} \pmod{555}$

(f) $2^x \equiv 2^7 \pmod{555}$

4. Mely pozitív egész m számokra teljesülnek az alábbi állítások?

   (a) $149 \equiv 139 \pmod{m}$

   (b) $2021 \equiv 2022 \pmod{m}$

   (c) $13 \equiv 613 \pmod{m}$ és $23 \equiv 617 \pmod{m}$

   (d) $7m + 61 \equiv 4m + 76 \pmod{m}$

5. Melyik az a legnagyobb m modulus, amelyre a $42x \equiv 2015 \pmod{m}$ kongruenciának megoldása az $x = 3$?

6. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak-e minden n egész számra.

   (a) $n^2 \equiv 1 \pmod{13} \quad \Rightarrow \quad n \equiv \pm 1 \pmod{13}$

   (b) $n^2 \equiv 1 \pmod{39} \quad \Rightarrow \quad n \equiv \pm 1 \pmod{39}$

   (c) $n^2 \equiv 1 \pmod{39} \quad \Rightarrow \quad n \equiv \pm 1 \pmod{13}$

7. (a) Hány pozitív osztója van a 27000-nek?

   (b) Hány olyan pozitív osztója van a 27000-nek, ami osztható 3-mal?

   (c) Hány olyan pozitív osztója van a 27000-nek, ami négyzetszám?

   (d) Határozzuk meg a 27000 és az 16200 közös pozitív osztóinak a számát.

8. Hány olyan egész szám van 1 és 1000 között, aminek ugyanannyi páros osztója van, mint páratlan?

9. Bizonyítsuk be, hogy ha az $n > 1$ számnak 2005 pozitív osztója van, akkor n nem lehet egy egész szám ötödik hatványa.

10. Melyek azok a p prímszámok, amelyekre $p + 10$ és $p + 14$ is prím?

11. Bizonyítsuk be, hogy ha valamely $n \geq 1$ egészre $2^n - 1$ prím, akkor n is prím.

12. Bizonyítsuk be, hogy ha valamely $n \geq 1$ egészre $2^n + 1$ prím, akkor n 2-hatvány.

13. Egy faluban száz család él, 1-től 100-ig számozott házakban. A Mikulás megérkezik a krampuszaival a faluba.

    (a) Az első krampusz minden házba visz egy ajándékot, a második krampusz csak minden második házba visz a jándékot (azaz az elsőbe nem, a másodikba igen, stb.), a harmadik krampusz minden harmadik házba és így tovább, végül az utolsó krampusz már csak az utolsó házba. Hány család kap páratlan sok ajándékot?

    (b) A következő évben az első krampusz minden házba visz egy ajándékot, a második krampusz minden második házba visz két ajándékot, a harmadik krampusz minden harmadik házba visz ajándékot és így tovább, végül az századik krampusz a századik házba visz száz ajándékot. Ezúttal hány család kap páratlan sok ajándékot?

14. Melyek az $n^4 + 4$ alakú prímek (azaz melyek azok a p prímszámok, amelyekhez található olyan n egész szám, hogy $p = n^4 + 4$)?