Kifejtési tétel, műveletek mátrixokkal

Bevezetés a számításelméletbe 1

10. gyakorlat

2022.

Előjeles aldetermináns.

Az $n \times n$-es A mátrix a_{ij} eleméhez tartozó A_{ij} előjeles aldeterminánst úgy kapjuk, hogy az A mátrixból elhagyjuk az i-edik sorát és a j-edik oszlopát, majd a kapott $(n-1)\times(n-1)$-es mátrix determinánsát megszorozzuk $(-1)^{i+j}$-nel.

Kifejtési tétel.

Ha az $n \times n$-es A mátrix valamelyik sorának, vagy oszlopának minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldetermináns értékével és a kapott n darab kéttényezős szorzatot összeadjuk, akkor A determinánsának értékét kapjuk.

Determinánsok szorzástétele.

Ha A, B $n \times n$-es valós mátrixok, akkor $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

1. Számoljuk ki az alábbi determinánsok értékét a kifejtési tétel felhasználásával.

   (a)
$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

   (b)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

2. Számítsuk ki az alábbi determinánsokat a p valós paraméter minden értékére.

   (a)
$$\begin{vmatrix} p & 0 & 5 & p \\ 6 & p & 4 & 0 \\ 7 & 2 & p & 0 \\ 6 & p & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

   (b)
$$\begin{vmatrix} p & 2p & p & 3p \\ 3 & 9 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 7 & 1 \\ 3 & 7 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

3. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ és $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Adjuk meg az AB, BA, $A \cdot A^{\top}$, $AB + 2C$ mátrixokat.

4. A 4×4-es A és B mátrixok i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elemet jelölje $a_{i,j}$, illetve $b_{i,j}$ minden $1 \le i, j \le 4$ esetén. Tegyük fel, hogy minden $1 \le i, j \le 4$ esetén

$$a_{i,j} = \begin{cases} i+j, & \text{ha } j = 1,2, \\ 9-i-j, & \text{ha } j = 3,4, \end{cases} \qquad \text{és} \qquad b_{i,j} = \begin{cases} j, & \text{ha } i = 1,3, \\ 1-j, & \text{ha } i = 2,4. \end{cases}$$

   (a) Határozzuk meg az $A \cdot B$ mátrixot.

(b) Határozzuk meg a $B \cdot A$ mátrix determinánsát.

5. (a) Számítsuk ki az A^{2015} mátrixot az alábbi A mátrixra.
   (b) Számítsuk ki $\det(B^{2015})$ értékét az alábbi B mátrixra.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Számítsuk ki az A^{2018} mátrixot az alábbi A mátrixra.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Döntsük el, hogy az alábbi egyenlőségek igazak-e bármely $n \times n$-es A és B mátrixokra.

   (a) $(AB)^2 = A^2B^2$
   (b) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
   (c) $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$
   (d) $(A-E)^2 = A^2 - 2A + E$
   (e) $A^3 + E = (A+E)(A^2 - A + E)$
   (f) $A^3 - E = (A-E)(A^2 + A + E)$

8. Léteznek-e olyan 2×2-es A és B mátrixok, melyekre $A^2 = B^2$, de $A \neq B$ és $A \neq (-1) \cdot B$?

9. A 100×100-as A mátrix első 50 oszlopának minden eleme 3, az utolsó 50 oszlop minden eleme 2. A 100×100-as B mátrix minden oszlopára teljesül, hogy abban az első 50 elem összege 2, az utolsó 50 elem összege 3. Határozzuk meg az AB szorzatot.

10. A 2×3-as A mátrixnak nincs negatív eleme. Tudjuk ezen kívül, hogy az $A \cdot A^\top$ mátrix bal felső eleme 0, a jobb alsó eleme pedig 14; továbbá az $A^\top \cdot A$ mátrix bal felső eleme 4, a jobb alsó eleme pedig 9. Határozzuk meg az A, az $A \cdot A^\top$, valamint az $A^\top \cdot A$ mátrixokat.

11. Az A mátrix minden eleme 0, 1 vagy -1, és a 0-tól különböző elemeinek száma 2012. Határozzuk meg az $A \cdot A^\top$ mátrix főátlójában álló elemeknek az összegét.

12. Oldjuk meg az alábbi A és B mátrixokra az $X \cdot A = B$ mátrixegyenletet (vagyis adjuk meg az összes olyan X mátrixot, amelyre az egyenlet fennáll.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 12 & 24 & 2 & 12 \\ 3 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 15 & 18 & 21 & 35 \end{pmatrix}$$

13. Oldjuk meg az alábbi A és B mátrixokra az $A \cdot X = B$ mátrixegyenletet (vagyis adjuk meg az összes olyan X mátrixot, amelyre az egyenlet fennáll.)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 9 \\ 2 & 6 & 7 \\ 4 & 13 & 10 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 21 & 0 \\ 16 & 0 \\ 23 & 0 \end{pmatrix}$$

14. A 2018-oszlopú A mátrixra teljesül, hogy léteznek olyan $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in \mathbb{R}^{2018}$, $\underline{x}_1 \neq \underline{x}_2$ vektorok, amelyekre $A \cdot \underline{x}_1 = A \cdot \underline{x}_2$. Mutassuk meg, hogy ekkor léteznek olyan $\underline{z}_1, \underline{z}_2, \ldots, \underline{z}_{2018} \in \mathbb{R}^{2018}$ vektorok is, amelyek közül semelyik kettő nem egyenlő és $A \cdot \underline{z}_1 = A \cdot \underline{z}_2 = \ldots = A \cdot \underline{z}_{2018}$.