# Mátrixok inverze, rangja

Bevezetés a számításelméletbe 1

11. gyakorlat

2022.

**Inverz mátrix.**

Egy $A$ $n\times n$-es mátrix inverzén azt az $n\times n$-es $A^{-1}$ mátrixot értjük, melyre $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$ teljesül.

**Tétel.**

Az $n\times n$-es $A$ mátrixnak akkor és csak akkor létezik inverze, ha $\det A\neq 0$.

**Definíció.**

Legyen $A$ tetszőleges mátrix. Azt mondjuk, hogy

(i) $A$ oszloprangja $r$, ha $A$-nak van $r$ darab lineárisan független oszlopa, de $r+1$ darab már nincs;

(ii) $A$ sorrangja $r$, ha $A$-nak van $r$ darab lineárisan független sora, de $r+1$ darab már nincs;

(iii) $A$ determinánsrangja $r$, ha $A$-nak van $r\times r$-es nemnulla determinánsú részmátrixa, de $(r+1)\times(r+1)$-es már nincs.

**Tétel, definíció.**

Tetszőleges $A$ mátrix oszlop-, sor- és determinánsrangja egyenlő. Ezt a közös értéket nevezzük az $A$ mátrix rangjának.

1. Számoljuk ki a következő mátrixok inverzét, amennyiben azok léteznek.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&3&2&0\\0&1&0&3\\0&0&2&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&1&1&1&\dots&1\\1&2&2&2&\dots&2\\1&2&3&3&\dots&3\\1&2&3&4&\dots&4\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&2&3&4&\dots&n\end{pmatrix}$$

2. Az $A$ és $B$ $n\times n$-es mátrixokról tudjuk, hogy $\det A\neq 0$, valamint hogy $AB=0$. Határozzuk meg a $B$ mátrixot.

3. Határozzuk meg az alábbi $A$ mátrix inverzének bal felső sarkában álló elemét.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&1\\2&2&1\end{pmatrix}$$

4. (a) Határozzuk meg azon $p$ valós értékeket, melyekre az alábbi mátrixnak van inverze.

   (b) $p=3$ esetén adjuk meg az inverz mátrix bal felső elemét.

$$\begin{pmatrix}2&4&0\\3&6&p\\6&13&1\end{pmatrix}$$

5. Határozzuk meg az alábbi $A$ és $B$ mátrixok hiányzó, betűkkel jelölt elemeit, ha tudjuk, hogy $B = A^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -1 & x & 1 \\ y & z & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & p \\ q & 5 & r \\ s & -26 & 27 \end{pmatrix}$$

6. Számoljuk ki a következő mátrixok rangját.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Számoljuk ki a következő mátrixok rangját a $c$, az $x$, illetve a $p$ és $q$ valós paraméterek függvényében.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2c+7 & 3c-2 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & 9 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & p \\ 3 & 4 & q & 2 \end{pmatrix}$$

8. Egy $4 \times 6$-os $A$ mátrixban az $i$-edik sor és a $j$-edik oszlop kereszteződésében álló elem $a_{ij} = i^2 + i \cdot j$ minden $1 \le i \le 4$ és $1 \le j \le 6$ esetén. Határozzuk meg $A$ rangját.

9. A $6 \times 6$-os $A$ mátrixra $\mathrm{r}(A) = 4$. Mutassuk meg, hogy léteznek olyan $B$ és $C$ mátrixok, amelyekre $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(C) = 2$ és $A = B + C$.

10. Legyen $A$ egy 5-rangú $5 \times 5$-ös mátrix. Mutassuk meg, hogy $A$ előállítható 25 darab 1-rangú mátrix összegeként (vagyis léteznek olyan 1-rangú $A_1, A_2, \ldots, A_{25}$ mátrixok, melyekre $A_1 + A_2 + \ldots + A_{25} = A$).

11. Nevezzünk egy számsorozatot félig számtaninak, ha bármely eleméről a következőre átlépve a növekmény csak két különböző értéket vehet fel. (Így például a 3, 7, 11, 12, 16, 17, 18 sorozat félig számtani.) Az $A$ mátrixra teljesül, hogy az első három sora félig számtani sorozatot alkot (vagyis a sor elemein balról jobbra végighaladva félig számtani sorozatot kapunk), az összes többi sora pedig számtani sorozatot alkot. Mutassuk meg, hogy $\mathrm{r}(A) \le 9$.

12. Nevezzünk egy $4 \times 4$-es mátrixot szépen kiegészíthetőnek, ha ki tudjuk egészíteni (egy-egy plusz sorral és oszloppal) $5 \times 5$-ös invertálható mátrixszá. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak-e.
   (a) Ha egy $4 \times 4$-es mátrix szépen kiegészíthető, akkor a rangja legalább 3.
   (b) Ha egy $4 \times 4$-es mátrix rangja legalább 3, akkor a mátrix szépen kiegészíthető.

13. Legyen $A$ $m \times n$-es (vagyis $m$ sorból és $n$ oszlopból álló), $B$ pedig $n \times m$-es (vagyis $n$ sorból és $m$ oszlopból álló) mátrix. Tegyük fel, hogy $n < m$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $AB$ mátrix nem invertálható.

14. Egy $5 \times 5$-ös $A$ mátrixnak pontosan hat olyan $3 \times 3$-as részmátrixa van, ami invertálható. Mutassuk meg, hogy $A$ nem invertálható.

15. Legyen $A$ és $B$ $n \times m$-es mátrix. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathrm{r}(A + B) \le \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B).$$

16. Legyen $M$ egy 100 oszlopú mátrix. Jelölje $A$ az $M$ első 70 oszlopából álló, $B$ pedig az $M$ utolsó 70 oszlopából álló mátrixot. Végül jelölje $X$ az $M$ középső 40 oszlopából álló mátrixot. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B) \ge \mathrm{r}(M) + \mathrm{r}(X).$$