

# Lineáris leképezések

## BEVEZETÉS A SZÁMÍTÁSELMÉLETBE 1

### 12. gyakorlat

2022.

#### Lineáris leképezés.

Az  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  függvényt lineáris leképezésnek nevezzük, ha létezik olyan  $k \times n$ -es  $A$  mátrix, melyre minden  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$  esetén  $f(\underline{x}) = A\underline{x}$  teljesül. Jelölés:  $A = [f]$ .

Ha  $n = k$ , akkor  $f$ -et lineáris transzformációnak is nevezzük.

#### Tétel.

Az  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  függvény akkor és csak akkor lineáris leképezés, ha tetszőleges  $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$  és  $\lambda \in \mathbb{R}$  esetén

$$(i) \quad f(\underline{x} + \underline{y}) = f(\underline{x}) + f(\underline{y}),$$

$$(ii) \quad f(\lambda \cdot \underline{x}) = \lambda \cdot f(\underline{x}).$$

Ekkor  $f$  mátrixa egyértelmű; tetszőleges  $i \in \{1, \dots, n\}$  esetén az  $i$ -edik oszlopa  $f(\underline{e}_i)$ .

#### Magtér, képtér.

Az  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  lineáris leképezés

– magtere  $\text{Ker} f = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\underline{x}) = \underline{0}\}$ ,

– a képtere pedig  $\text{Im} f = \{\underline{y} \in \mathbb{R}^k \mid \exists \underline{x} \in \mathbb{R}^n : f(\underline{x}) = \underline{y}\}$ .

#### Dimenziótétel.

Tetszőleges  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  lineáris leképezés esetén  $\dim \text{Ker} f + \dim \text{Im} f = n$ .

#### Állítás.

Tetszőleges  $f$  lineáris leképezés esetén

–  $\text{Im} f$  megegyezik az  $[f]$  mátrix oszlopai által generált altérrel;

– az  $[f]$  mátrix redukált lépcsős alakjában a vezéregyest tartalmazó oszlopok száma  $\dim \text{Im} f$ ,

– azaz  $r([f]) = \dim \text{Im} f$ ,

– sőt, az  $[f]$  mátrix előbb említett oszlopai  $\text{Im} f$  egy bázisát alkotják.

1. Lineáris leképezések-e az alábbi  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  függvények? Ha igen, akkor írjuk fel a leképezés  $[f]$  mátrixát, illetve a leképezések magterét és a képterét, valamint ezek dimenzióját. Ha emellett  $f$  lineáris transzformáció is, akkor döntsük el, hogy invertálható-e és ha igen, írjuk fel az  $f^{-1}$  leképezés hozzárendelési szabályát.

(a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \mapsto (y, 3x)$

(b)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \mapsto (x^2, y^2)$

(c)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (x, y, z) \mapsto (x - y + z, x - y + z)$

- (d) Az  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  minden  $\underline{v}$  síkvektorhoz azt az  $x$  tengelyre eső vektort rendeli, melynek az első koordinátája a  $\underline{v}$  két koordinátája közül a nagyobb (nemkisebb).
- (e) Az  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  minden síkvektorhoz az  $x$  tengelyre vett tükörképének origó körüli  $+60^\circ$ -os elforgatottját rendeli.
- (f) Az  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  minden  $\underline{v}$  síkvektorhoz azt az  $x$  tengelyre eső vektort rendeli, melynek első koordinátája a  $\underline{v}$  koordinátáinak összege.
2. Az  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  lineáris transzformációról azt tudjuk, hogy az  $(5, 3)$  vektor képe a  $(2, 3)$  vektor, a  $(4, 3)$  vektoré pedig a  $(3, 2)$  vektor. Mi lesz a  $(11, 6)$  vektor képe?
3. Az  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  lineáris transzformáció az  $(1, 2)$  és a  $(3, 4)$  vektorhoz is az  $(5, 6)$  vektort rendeli.
- (a) Írjuk fel  $f$  mátrixát.
- (b) Mit rendel  $f$  a  $(99, 100)$  vektorhoz?
- (c) Igaz-e az  $(55, 55) \in \text{Im}f$  állítás?
- (d) Igaz-e az  $(55, 55) \in \text{Ker}f$  állítás?
4. Adjuk meg  $\text{Im}f$  és  $\text{Ker}f$  egy-egy bázisát, ha az  $f$  lineáris leképezés  $[f]$  mátrixa a következő.

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 12 & 1 & 14 \\ 3 & 9 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

5. A sík egy lineáris transzformációjának mátrixa a szokásos bázisban

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & x \end{pmatrix},$$

ahol  $x$  tetszőleges valós szám. Határozzuk meg  $x$  függvényében a transzformáció képterét és magterét.

6. Az  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  lineáris leképezés a  $(2, 6)$  vektorhoz a  $(14, 16, 14)$  vektort, az  $(1, -3)$  vektorhoz pedig az  $(1, -10, -5)$  vektort rendeli.
- (a) Írjuk fel  $f$  mátrixát.
- (b) Mit rendel  $f$  a  $(4, -1)$  vektorhoz?
- (c) A  $p$  paraméter milyen értékére teljesül a  $(10, -9, p) \in \text{Im}f$  állítás?
7. Az  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  leképezésről tudjuk, hogy teljesül rá az alábbi két feltétel.

a. Tetszőleges 7 elem képe lineárisan összefüggő.

b. Tetszőleges 8 lineárisan független  $\mathbb{R}^n$ -beli elem között van olyan, amelyiknek a képe nem  $\underline{0}$ .

Bizonyítsuk be, hogy ekkor  $n \leq 13$ .