Bázistranszformáció, sajátérték, sajátvektor

Bevezetés a számításelméletbe 1

13. gyakorlat

2022.

Tétel.

Legyen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció és B egy $n \times n$-es mátrix, melynek oszlopai bázist alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben. Ekkor az f transzformáció B bázis szerinti $[f]_B$ mátrixára az alábbiak teljesülnek.

(i) Minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén $[f(\underline{x})]_B = [f]_B[\underline{x}]_B$.

(ii) $[f]_B = B^{-1} \cdot [f] \cdot B$.

(iii) Minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén az $[f]_B$ mátrix i-edik oszlopa egyenlő az $[f(\underline{b}_i)]_B$ koordinátavektorral.

Sajátérték, sajátvektor.

Legyen A egy $n \times n$-es mátrix.

(i) A $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárt az A sajátértékének nevezzük, ha létezik olyan $\underline{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ vektor, amelyre $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$ teljesül.

(ii) A $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ vektort az A sajátvektorának nevezzük, ha létezik olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár, amelyre $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$ teljesül.

Tétel.

Legyen A egy $n \times n$-es mátrix. A $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár pontosan akkor sajátértéke A-nak, ha $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$.

Állítás.

Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$ az A $n \times n$-es mátrix egy sajátértéke. Ekkor az $(A - \lambda E)\underline{x} = \underline{0}$ lineáris egyenletrendszer $\underline{x} \neq \underline{0}$ megoldásai az A mátrix λ-hoz tartozó sajátvektorai.

Karakterisztikus polinom.

Legyen A egy $n \times n$-es mátrix. A $\det(A - \lambda \cdot E)$ determináns értékét az A karakterisztikus polinomjának nevezzük, ahol λ a változó. A jele $k_A(\lambda)$.

1. Tekintsük az
$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad (x, y) \mapsto (2x + y, 3x + 4y)$$
leképezést. Ha f lineáris transzformáció, akkor
   (a) adjuk meg az $[f]$ mátrix összes sajátértékét és sajátvektorát;
   (b) adjunk meg $\mathbb{R}^2$-ben egy $[f]$ sajátvektoraiból álló B bázist (ha ilyen létezik) és írjuk fel $[f]_B$-t ebben a bázisban.

2. Az $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformációra és az $\mathbb{R}^3$-beli $B = \{\underline{b}_1 = (1; 0; 0), \underline{b}_2 = (2; 1; 0), \underline{b}_3 = (2; 2; 1)\}$ bázisra teljesül, hogy $f(\underline{b}_1) = \underline{b}_2$, $f(\underline{b}_2) = \underline{b}_3$ és $f(\underline{b}_3) = \underline{b}_1$. Adjuk meg az $[f]_B$ és az $[f]$ mátrixokat.

3. Legyen $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ egy lineáris transzformáció, melynek mátrixa a $\underline{b}_1 = (1, 1)$ és $\underline{b}_2 = (1, -1)$ vektorokból álló bázisban felírva az alábbi.
$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$$
Határozzuk meg x és y értékét, ha tudjuk, hogy $(3, 1) \in \operatorname{Ker} f$.

4. Legyen $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció és $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ bázis $\mathbb{R}^3$-ben. Tegyük fel, hogy f mátrixa a B bázis szerint az alábbi mátrix. Határozzuk meg a $\underline{b}_2$ vektort, ha tudjuk, hogy $f(\underline{b}_1 + \underline{b}_3) = (10; 20; 30)$.

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -4 \\ -6 & 5 & 8 \\ -7 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

5. Az $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció $B = \{\underline{b}_1 = (1;1;0), \underline{b}_2 = (2;0;3), \underline{b}_3 = (0;1;-2)\}$ bázis szerinti mátrixa az alábbi. Az $\mathbb{R}^3$ melyik elemét rendeli f a $2\underline{b}_1 - \underline{b}_2 + 3\underline{b}_3$ vektorhoz?

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Határozzuk meg az alábbi mátrix összes sajátértékét és sajátvektorát.

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

7. (a) Sajátvektora-e az alábbi $\underline{v}$ vektor az alábbi A mátrixnak?

   (b) Adjuk meg az A mátrix egy sajátértékét és az összes, ehhez a sajátértékhez tartozó sajátvektort.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -2 & -3 & 10 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8. A p valós paraméter minden értékére adjuk meg az alábbi mátrix minden sajátértékét és a legnagyobb sajátértékhez tartozó minden sajátvektort.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ p & 4 & p \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

9. Az $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció hozzárendelési szabálya

$$f: (x, y, z) \mapsto (0, 3x + 4y + z, 6x + 2y + 5z).$$

   (a) Adjuk meg az $[f]$ mátrix összes sajátértékét és sajátvektorát.

   (b) Van-e $\mathbb{R}^3$-ben olyan B bázis, amire az $[f]_B$ mátrix diagonális (vagyis a főátlóján kívül minden elem nulla)? Ha igen, adjunk meg egy ilyen B-t és írjuk fel $[f]_B$-t.

10. Legyenek $\underline{u}$ és $\underline{v}$ az $n \times n$-es A mátrix különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorai. Lehetséges-e, hogy $\underline{u} + \underline{v}$ sajátvektora

   (a) A-nak; (b) A^2-nek?