Kongruenciák

Bevezetés a számításelméletbe 1

2. gyakorlat

2022.

Tétel.

Legyenek $a, b, c, d, m, k \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, $k \geq 1$ tetszőlegesek.

Ha $a \equiv b \pmod{m}$ és $c \equiv d \pmod{m}$, akkor az alábbiak teljesülnek.

(i) $a + c \equiv b + d \pmod{m}$

(ii) $a - c \equiv b - d \pmod{m}$

(iii) $ac \equiv bd \pmod{m}$

(iv) $a^k \equiv b^k \pmod{m}$

Tétel.

Legyenek $a, b, c, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$ tetszőlegesek, és legyen $d = (c, m)$. Ekkor

$$ac \equiv bc \pmod{m} \qquad \text{akkor és csak akkor, ha} \qquad a \equiv b \left(\mathrm{mod}\ \frac{m}{d}\right).$$

Tétel.

Az $ax \equiv b \pmod{m}$ lineáris kongruencia akkor és csak akkor oldható meg, ha $(a, m) \mid b$ teljesül; és ha megoldható, akkor (a, m) darab megoldás van modulo m.

1. Milyen maradékot ad
   - (a) $70^{70} + 68^{68}$ 23-mal osztva;
   - (b) 55^{100} 48-cal osztva;
   - (c) 1025^{1005} 1023-mal osztva;
   - (d) $65^{63^{61}}$ 66-tal osztva?
2. Mi az utolsó két számjegye az alábbi számoknak?
   - (a) $2001^{2021} \cdot 999^{1001}$
   - (b) 51^{151}
   - (c) $\frac{51^{151}}{9}$
3. Határozzuk meg az összes olyan x egész számot, amelyre az alábbi kongruenciák (külön-külön) teljesülnek.
   - (a) $13x \equiv 1 \pmod{28}$
   - (b) $9x \equiv 1 \pmod{88}$
   - (c) $16x \equiv 64 \pmod{56}$
   - (d) $66x \equiv 24 \pmod{36}$
   - (e) $8x \equiv 30 \pmod{28}$
   - (f) $77x \equiv 251 \pmod{35}$
4. Egy egész szám 109-cel vett osztási maradéka 5-tel kisebb, mint a szám 18-szorosának a 109-cel vett osztási maradéka. Milyen maradékot adhat ez a szám 109-cel osztva?
5. Milyen maradékot adhat egy egész szám 98-cal osztva, ha a 78-szorosa 6 maradékot ad 98-cal osztva?

6. Egy egész szám 17-szerese 23 maradékot ad 65-tel osztva. Mennyi maradékot adhat a szám 130-cal osztva?

7. Az n pozitív egész számra $43n - 1$ utolsó két számjegye megegyezik $2n + 2$ utolsó két számjegyével. Mi ez a két számjegy?

8. Mely egész számokra teljesül, hogy 7-tel osztva 2 és 9-cel osztva 3 maradékot adnak?

9. Adjuk meg az összes olyan négyjegyű pozitív egész számot, amelyre teljesül, hogy 51-gyel osztva 3 maradékot ad, továbbá a szám 17-szeresének utolsó két számjegye 15.

10. (a) Egy százlábú meg akarja számolni a lábait. Azt tudja biológiából, hogy minden százlábúnak legfeljebb 344 lába van. Ha 13-asával számolja a lábait, akkor 3 marad ki, ha 17-esével számolja, akkor viszont 10 marad ki. Hánylábú a százlábú?

    (b) Egy másik százlábú is megirigyli ezt a módszert. Neki 16-osával számolva 5 marad ki, 20-asával számolva pedig 15 marad ki. Bizonyítsuk be, hogy elszámolta magát.

    (c) A százlábúak királyához is eljut a módszer. Neki 6-osával számolva 5 marad ki, 7-esével számolva 6, 8-asával számolva pedig 7. Neki hány lába van?

11. Egy helyi cukrászda úgy dönt, hogy előre csomagolt díszdobozokban, akciósan értékesíti a karácsony előttről megmaradt szaloncukrot, amiknek számáról csak azt tudják, hogy 400 és 600 közötti. Amikor tizenkettesével próbálják dobozolni a cukrokat, akkor hét cukor megmarad. Amikor viszont ehelyett ötvenes megapakkokkal próbálkoznak, akkor az utolsó dobozba épp eggyel kevesebb jut a szükségesnél. Hány szaloncukor marad meg, ha tizenhatosával dobozolják őket?

12. Határozzuk meg az összes olyan háromjegyű, pozitív egész számot, amelynek a 7-es és 8-as számrendszerbeli alakjának az utolsó két számjegye is 11.

13. Jumurdzsák először örült a tiszti kinevezésnek, de hamarosan elment a kedve az egésztől. Mindjárt az első összecsapásban jópáran elestek a rábízott 50-fős csapatból, amit még elviselt volna, csakhogy köztük volt a pénztáros is, így már a második héten Jumurdzsáknak kellett kiosztania a zsoldot, ami cseppet sem volt egyszerű feladat. Minden alárendeltjének 26 akcse járt hetente (neki magának pedig 2 arany), de a főnökség persze nem bajlódott akcsékkal, aranyban adta át Jumurdzsáknak a csapat heti zsoldját (1 arany = 60 akcse). Fel kellett tehát váltania az aranyakat a zsold kiosztása előtt, ráadásul még a visszamaradó nyamvadt 2 akcsét sem tarthatta meg. – Így jár, aki elveszti a talizmánját – sóhajtott keserűen. Hányan estek el (a második hétig) Jumurdzsák alárendeltjei közül?

14. Egy n egész szám 3 maradékot ad 82-vel osztva. Milyen maradékot adhat az n szám 182-vel osztva?

15. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a, b, c és d egész számokra

$$(a+b, c+d) \mid a^{99}c^{100} + b^{99}d^{100}.$$