Gauss-elimináció

Bevezetés a számításelméletbe 1

8. gyakorlat

2022.

1. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket.

   (a)
$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 3 \\ 3x + 5y + 10z &= 5 \\ 3x + 2y + 13z &= 2 \\ 6x + 13y + 18z &= 13 \end{aligned}$$

   (b)
$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 3 \\ 3x + 5y + 10z &= 5 \\ 3x + 2y + 13z &= 2 \\ 6x + 13y + 17z &= 13 \end{aligned}$$

   (c)
$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 3 \\ 3x + 5y + 10z &= 5 \\ 3x + 2y + 13z &= 2 \\ 6x + 13y + 17z &= 11 \end{aligned}$$

2. Döntsük el, hogy a p valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 4x_4 &= -2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 8x_4 &= -3 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 + 8x_4 &= 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + px_3 + (p^2 + p + 12)x_4 &= -6 \end{aligned}$$

3. Döntsük el, hogy a p és q valós paraméterek milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 14x_3 &= -17 \\ 2x_1 - 6x_2 - 28x_3 + p \cdot x_4 &= q - 34 \\ 3x_1 - 7x_2 - 36x_3 + 4p \cdot x_4 &= 4q - 37 \end{aligned}$$

4. (a) A p és q valós paraméterek minden értékére adjuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldásainak a számát.

   (b) Ha p-nek és q-nak van olyan értéke, amelyre az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, akkor a p és q ezen értékeire adjuk meg az összes megoldást.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - 7x_4 &= 8 \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 - 28x_4 &= 23 \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 - 31x_4 &= 14 \\ 2x_1 + p \cdot x_4 &= q \end{aligned}$$

5. Legyen
$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 34 \end{pmatrix}.$$

   (a) Határozzuk meg az u és v vektorok által generált alteret.

   (b) Döntsük el, hogy bázist alkotnak-e $\mathbb{R}^3$-ban az $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorok, és ha igen, akkor adjuk meg ebben a bázisban $\underline{a}$ koordinátavektorát.

6. A p valós paraméter milyen értékeire alkot bázist $\mathbb{R}^4$-ben a $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4\}$ vektorrendszer? A p-nek ezen értékeire határozzuk meg a $[\underline{v}]_B$ koordinátavektort.
$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}, \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 9 \\ 15 \\ 12 \end{pmatrix}, \underline{b}_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -19 \\ 4 \\ 19 \end{pmatrix}, \underline{b}_4 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 9 \\ -5 \\ p \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -5 \\ -48 \\ -19+3p \end{pmatrix}.$$

7. Határozzuk meg az $x + y + z = 6$ és a $5x + 7y - 3z = 6$ egyenletű síkok metszetét.

8. Oldjuk meg az alábbi n ismeretlenes és n egyenletből álló egyenletrendszereket.

   (a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n &= n \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \ldots + 2x_n &= n-1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + 3x_n &= n-2 \\ &\vdots \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n &= 1 \end{aligned}$$

   (b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ &\vdots \\ x_{n-1} + x_n &= 1 \\ x_n + x_1 &= 1 \end{aligned}$$

9. Találtunk egy lapot, amin valaki a (lineáris egyenletrendszerek megoldására szolgáló) Gauss-eliminációt gyakorolta. A papír sajnos erősen megrongálódott, ezért csak a kiinduló feladat részletei és a néhány lépés után kapott lépcsős alak olvasható.
$$\left(\begin{array}{cccc|c} \square & 6 & \square & \square & \square \\ 2 & 4 & -4 & 7 & \square \\ 5 & 10 & \square & \square & -4 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$
   A kiinduló feladatban a $\square$-tel jelölt számok olvashatatlanok. (Ezek persze egymástól különböző értékek is lehetnek.) Rekonstruáljuk a lap elveszett részeit: adjuk meg a $\square$-ekben álló értékeket, majd futtassuk le a Gauss-eliminációt és adjuk meg az egyenletrendszer megoldásait.

10. Egy négyváltozós lineáris egyenletrendszerből bárhogyan is hagyunk el egy egyenletet, a kapott egyenletrendszer egyértelműen megoldható lesz. Legkevesebb hány egyenletet kell tartalmazzon az eredeti egyenletrendszer?

11. Egy lineáris egyenletrendszerről tudjuk, hogy van olyan megoldása, amiben a változók összege 2020, de olyan megoldása már nincs, amiben a változók összege 2021. Eldönthető-e ennyi információ alapján, hogy ugyanennek a lineáris egyenletrendszernek van-e olyan megoldása, amiben a változók összege 2022?