

# Kifejtési tétel, műveletek mátrixokkal

## BEVEZETÉS A SZÁMÍTÁSELMÉLETBE 1

### 10. gyakorlat

2023.

#### Előjeles aldetermináns.

Az  $n \times n$ -es  $A$  mátrix  $a_{ij}$  eleméhez tartozó  $A_{ij}$  előjeles aldeterminánst úgy kapjuk, hogy az  $A$  mátrixból elhagyjuk az  $i$ -edik sorát és a  $j$ -edik oszlopát, majd a kapott  $(n-1) \times (n-1)$ -es mátrix determinánsát megszorozzuk  $(-1)^{i+j}$ -nel.

#### Kifejtési tétel.

Ha az  $n \times n$ -es  $A$  mátrix valamelyik sorának, vagy oszlopának minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldetermináns értékével és a kapott  $n$  darab kéttényezős szorzatot összeadjuk, akkor  $A$  determinánsának értékét kapjuk.

#### Determinánsok szorzástétele.

Ha  $A, B$   $n \times n$ -es valós mátrixok, akkor  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ .

1. Számoljuk ki az alábbi determinánsok értékét a kifejtési tétel felhasználásával.

(a)

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

2. Számítsuk ki az alábbi determinánsokat a  $p$  valós paraméter minden értékére.

(a)

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 5 & p \\ 6 & p & 4 & 0 \\ 7 & 2 & p & 0 \\ 6 & p & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} p & 2p & p & 3p \\ 3 & 9 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 7 & 1 \\ 3 & 7 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

3. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Adjuk meg az  $AB$ ,  $BA$ ,  $A \cdot A^\top$ ,  $AB + 2C$  mátrixokat.

4. A  $4 \times 4$ -es  $A$  és  $B$  mátrixok  $i$ -edik sorának és  $j$ -edik oszlopának kereszteződésében álló elemet jelölje  $a_{i,j}$ , illetve  $b_{i,j}$  minden  $1 \leq i, j \leq 4$  esetén. Tegyük fel, hogy minden  $1 \leq i, j \leq 4$  esetén

$$a_{i,j} = \begin{cases} i + j, & \text{ha } j = 1, 2, \\ 9 - i - j, & \text{ha } j = 3, 4, \end{cases} \quad \text{és} \quad b_{i,j} = \begin{cases} j, & \text{ha } i = 1, 3, \\ 1 - j, & \text{ha } i = 2, 4. \end{cases}$$

- (a) Határozzuk meg az  $A \cdot B$  mátrixot.  
 (b) Határozzuk meg a  $B \cdot A$  mátrix determinánsát.
5. (a) Számítsuk ki az  $A^{2015}$  mátrixot az alábbi  $A$  mátrixra.  
 (b) Számítsuk ki  $\det(B^{2015})$  értékét az alábbi  $B$  mátrixra.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Számítsuk ki az  $A^{2018}$  mátrixot az alábbi  $A$  mátrixra.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Döntsük el, hogy az alábbi egyenlőségek igazak-e bármely  $n \times n$ -es  $A$  és  $B$  mátrixokra.

(a) $(AB)^2 = A^2B^2$	(d) $(A - E)^2 = A^2 - 2A + E$
(b) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$	(e) $A^3 + E = (A + E)(A^2 - A + E)$
(c) $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$	(f) $A^3 - E = (A - E)(A^2 + A + E)$

8. Léteznek-e olyan  $2 \times 2$ -es  $A$  és  $B$  mátrixok, melyekre  $A^2 = B^2$ , de  $A \neq B$  és  $A \neq (-1) \cdot B$ ?
9. A  $100 \times 100$ -as  $A$  mátrix első 50 oszlopának minden eleme 3, az utolsó 50 oszlop minden eleme 2. A  $100 \times 100$ -as  $B$  mátrix minden oszlopára teljesül, hogy abban az első 50 elem összege 2, az utolsó 50 elem összege 3. Határozzuk meg az  $AB$  szorzatot.
10. A  $2 \times 3$ -as  $A$  mátrixnak nincs negatív eleme. Tudjuk ezen kívül, hogy az  $A \cdot A^T$  mátrix bal felső eleme 0, a jobb alsó eleme pedig 14; továbbá az  $A^T \cdot A$  mátrix bal felső eleme 4, a jobb alsó eleme pedig 9. Határozzuk meg az  $A$ , az  $A \cdot A^T$ , valamint az  $A^T \cdot A$  mátrixokat.
11. Az  $A$  mátrix minden eleme 0, 1 vagy  $-1$ , és a 0-tól különböző elemeinek száma 2012. Határozzuk meg az  $A \cdot A^T$  mátrix főátlójában álló elemeknek az összegét.
12. Oldjuk meg az alábbi  $A$  és  $B$  mátrixokra az  $X \cdot A = B$  mátrixegyenletet (vagyis adjuk meg az összes olyan  $X$  mátrixot, amelyre az egyenlet fennáll.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 12 & 24 & 2 & 12 \\ 3 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 15 & 18 & 21 & 35 \end{pmatrix}$$

13. Oldjuk meg az alábbi  $A$  és  $B$  mátrixokra az  $A \cdot X = B$  mátrixegyenletet (vagyis adjuk meg az összes olyan  $X$  mátrixot, amelyre az egyenlet fennáll.)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 9 \\ 2 & 6 & 7 \\ 4 & 13 & 10 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 21 & 0 \\ 16 & 0 \\ 23 & 0 \end{pmatrix}$$

14. A 2018-oszlopú  $A$  mátrixra teljesül, hogy léteznek olyan  $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in \mathbb{R}^{2018}$ ,  $\underline{x}_1 \neq \underline{x}_2$  vektorok, amelyekre  $A \cdot \underline{x}_1 = A \cdot \underline{x}_2$ . Mutassuk meg, hogy ekkor léteznek olyan  $\underline{z}_1, \underline{z}_2, \dots, \underline{z}_{2018} \in \mathbb{R}^{2018}$  vektorok is, amelyek közül semelyik kettő nem egyenlő és  $A \cdot \underline{z}_1 = A \cdot \underline{z}_2 = \dots = A \cdot \underline{z}_{2018}$ .