Mátrixok inverze, rangja

Bevezetés a számításelméletbe 1

11. gyakorlat

2023.

Inverz mátrix.

Egy A $n \times n$-es mátrix inverzén azt az $n \times n$-es A^{-1} mátrixot értjük, melyre $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ teljesül.

Tétel.

Az $n \times n$-es A mátrixnak akkor és csak akkor létezik inverze, ha $\det A \neq 0$.

Definíció.

Legyen A tetszőleges mátrix. Azt mondjuk, hogy

(i) A oszloprangja r, ha A-nak van r darab lineárisan független oszlopa, de $r+1$ darab már nincs;

(ii) A sorrangja r, ha A-nak van r darab lineárisan független sora, de $r+1$ darab már nincs;

(iii) A determinánsrangja r, ha A-nak van $r \times r$-es nemnulla determinánsú részmátrixa, de $(r+1) \times (r+1)$-es már nincs.

Tétel, definíció.

Tetszőleges A mátrix oszlop-, sor- és determinánsrangja egyenlő. Ezt a közös értéket nevezzük az A mátrix rangjának.

1. Számoljuk ki a következő mátrixok inverzét, amennyiben azok léteznek.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$$

2. Az A és B $n \times n$-es mátrixokról tudjuk, hogy $\det A \neq 0$, valamint hogy $AB = 0$. Határozzuk meg a B mátrixot.

3. Legyen A egy $n \times n$-es mátrix, $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ pedig tetszőleges oszlopvektorok. Bizonyítsuk be, hogy ha $\underline{x} \neq \underline{y}$, de $A\underline{x} = A\underline{y}$, akkor $\det A = 0$.

4. (a) Határozzuk meg azon p valós értékeket, melyekre az alábbi mátrixnak van inverze.

   (b) $p = 3$ esetén adjuk meg az inverz mátrix bal felső elemét.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & p \\ 6 & 13 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Határozzuk meg az alábbi A és B mátrixok hiányzó, betűkkel jelölt elemeit, ha tudjuk, hogy $B = A^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -1 & x & 1 \\ y & z & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & p \\ q & 5 & r \\ s & -26 & 27 \end{pmatrix}$$

6. Számoljuk ki a következő mátrixok rangját a c, az x, illetve a p és q valós paraméterek függvényében.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2c+7 & 3c-2 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & 9 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & p \\ 3 & 4 & q & 2 \end{pmatrix}$$

7. Az alábbi A mátrixból készítsük el a 3×4-es B mátrixot úgy, hogy A-hoz új sorként hozzávesszük A sorainak az összegét. Ezután a kapott B mátrixból készítsük el a 3×5-ös C mátrixot úgy, hogy B-hez új oszlopként hozzávesszük B oszlopainak az összegét. Végül a C mátrixból készítsük el a 4×5-ös D mátrixot úgy, hogy C-hez új sorként hozzávesszük C sorainak az összegét. Határozzuk meg a D mátrix rangját, $\mathrm{r}(D)$-t.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 3 \\ -4 & 10 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

8. A 6×6-os A mátrixra $\mathrm{r}(A) = 4$. Mutassuk meg, hogy léteznek olyan B és C mátrixok, amelyekre $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(C) = 2$ és $A = B + C$.

9. Legyen A egy 5-rangú 5×5-ös mátrix. Mutassuk meg, hogy A előállítható 25 darab 1-rangú mátrix összegeként (vagyis léteznek olyan 1-rangú $A_1, A_2, \ldots, A_{25}$ mátrixok, melyekre $A_1 + A_2 + \ldots + A_{25} = A$).

10. Nevezzünk egy számsorozatot félig számtaninak, ha bármely eleméről a következőre átlépve a növekmény csak két különböző értéket vehet fel. (Így például a 3, 7, 11, 12, 16, 17, 18 sorozat félig számtani.) Az A mátrixra teljesül, hogy az első három sora félig számtani sorozatot alkot (vagyis a sor elemein balról jobbra végighaladva félig számtani sorozatot kapunk), az összes többi sora pedig számtani sorozatot alkot. Mutassuk meg, hogy $\mathrm{r}(A) \leq 9$.

11. Legyen A $m \times n$-es (vagyis m sorból és n oszlopból álló), B pedig $n \times m$-es (vagyis n sorból és m oszlopból álló) mátrix. Tegyük fel, hogy $n < m$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az AB mátrix nem invertálható.

12. Egy 5×5-ös A mátrixnak pontosan hat olyan 3×3-as részmátrixa van, ami invertálható. Mutassuk meg, hogy A nem invertálható.

13. Mutassuk meg, hogy bármely 2×2-es mátrixot ki lehet egészíteni két új sorral, majd két új oszloppal úgy, hogy olyan 4×4-es mátrixot kapjunk, melynek van inverze.

14. Legyen A és B két $n \times m$-es mátrix. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathrm{r}(A + B) \leq \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B).$$

15. Legyen M egy 100 oszlopú mátrix. Jelölje A az M első 70 oszlopából álló, B pedig az M utolsó 70 oszlopából álló mátrixot. Végül jelölje X az M középső 40 oszlopából álló mátrixot. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B) \geq \mathrm{r}(M) + \mathrm{r}(X).$$