Lineáris leképezések

Bevezetés a számításelméletbe 1

12. gyakorlat

2023.

Lineáris leképezés.

Az $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ függvényt lineáris leképezésnek nevezzük, ha létezik olyan $k \times n$-es A mátrix, melyre minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén $f(\underline{x}) = A\underline{x}$ teljesül. Jelölés: $A = [f]$.

Ha $n = k$, akkor f-et lineáris transzformációnak is nevezzük.

Tétel.

Az $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ függvény akkor és csak akkor lineáris leképezés, ha tetszőleges $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(i) $f(\underline{x} + \underline{y}) = f(\underline{x}) + f(\underline{y})$,

(ii) $f(\lambda \cdot \underline{x}) = \lambda \cdot f(\underline{x})$.

Ekkor f mátrixa egyértelmű; tetszőleges $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén az i-edik oszlopa $f(\underline{e}_i)$.

Magtér, képtér.

Az $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lineáris leképezés

- magtere $\mathrm{Ker} f = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\underline{x}) = \underline{0}\}$,
- a képtere pedig $\mathrm{Im} f = \left\{\underline{y} \in \mathbb{R}^k \mid \exists \underline{x} \in \mathbb{R}^n: \ f(\underline{x}) = \underline{y}\right\}$.

Dimenziótétel.

Tetszőleges $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lineáris leképezés esetén $\dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f = n$.

Állítás.

Tetszőleges f lineáris leképezés esetén

- $\mathrm{Im} f$ megegyezik az $[f]$ mátrix oszlopai által generált altérrel;
- az $[f]$ mátrix redukált lépcsős alakjában a vezéregyest tartalmazó oszlopok száma $\dim \mathrm{Im} f$,
- azaz $\mathrm{r}\big([f]\big) = \dim \mathrm{Im} f$,
- sőt, az $[f]$ mátrix előbb említett oszlopai $\mathrm{Im} f$ egy bázisát alkotják.

1. Lineáris leképezések-e az alábbi $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ függvények? Ha igen, akkor írjuk fel a leképezés $[f]$ mátrixát, illetve a leképezések magterét és a képterét, valamint ezek dimenzióját. Ha emellett f lineáris transzformáció is, akkor döntsük el, hogy invertálható-e és ha igen, írjuk fel az f^{-1} leképezés hozzárendelési szabályát.

   (a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x, y) \mapsto (y, 3x)$

   (b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x, y) \mapsto (x^2, y^2)$

   (c) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x, y, z) \mapsto (x - y + z, x - y + z)$

(d) Az $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ minden $\underline{v}$ síkvektorhoz azt az x tengelyre eső vektort rendeli, melynek az első koordinátája a $\underline{v}$ két koordinátája közül a nagyobb (nemkisebb).

(e) Az $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ minden síkvektorhoz az x tengelyre vett tükörképének origó körüli $+60°$-os elforgatottját rendeli.

(f) Az $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ minden $\underline{v}$ síkvektorhoz azt az x tengelyre eső vektort rendeli, melynek első koordinátája a $\underline{v}$ koordinátáinak összege.

2. Az $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformációról azt tudjuk, hogy az $(5,3)$ vektor képe a $(2,3)$ vektor, a $(4,3)$ vektoré pedig a $(3,2)$ vektor. Mi lesz a $(11,6)$ vektor képe?

3. Az $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció az $(1,2)$ és a $(3,4)$ vektorhoz is az $(5,6)$ vektort rendeli.

   (a) Írjuk fel f mátrixát.

   (b) Mit rendel f a $(99,100)$ vektorhoz?

   (c) Igaz-e az $(55,55) \in \mathrm{Im} f$ állítás?

   (d) Igaz-e az $(55,55) \in \mathrm{Ker} f$ állítás?

4. Adjuk meg $\mathrm{Im} f$ és $\mathrm{Ker} f$ egy-egy bázisát, ha az f lineáris leképezés $[f]$ mátrixa a következő.

   (a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

   (b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 12 & 1 & 14 \\ 3 & 9 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

5. A sík egy lineáris transzformációjának mátrixa a szokásos bázisban
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & x \end{pmatrix},$$
ahol x tetszőleges valós szám. Határozzuk meg x függvényében a transzformáció képterét és magterét.

6. Az $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés a $(2,6)$ vektorhoz a $(14,16,14)$ vektort, az $(1,-3)$ vektorhoz pedig az $(1,-10,-5)$ vektort rendeli.

   (a) Írjuk fel f mátrixát.

   (b) Mit rendel f a $(4,-1)$ vektorhoz?

   (c) A p paraméter milyen értékére teljesül a $(10,-9,p) \in \mathrm{Im} f$ állítás?

7. Az $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ leképezésről tudjuk, hogy teljesül rá az alábbi két feltétel.

   a. Tetszőleges 7 elem képe lineárisan összefüggő.

   b. Tetszőleges 8 lineárisan független $\mathbb{R}^n$-beli elem között van olyan, amelyiknek a képe nem $\underline{0}$.

   Bizonyítsuk be, hogy ekkor $n \leq 13$.