Térbeli koordinátageometria

Bevezetés a számításelméletbe 1

5. gyakorlat

2023.

Az egyenes paraméteres egyenletrendszere.

Adott $\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ és $P\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$. A P ponton átmenő, $\underline{v}$ irányvektorú egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + ta \\ y &= y_0 + tb \\ z &= z_0 + tc \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenes egyenletrendszere.

Adott $\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ és $P\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$. Ha $a, b, c \neq 0$, akkor a P ponton átmenő, $\underline{v}$ irányvektorú egyenes egyenletrendszere:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Ha például $c = 0$, akkor az egyenes egyenletrendszere:

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{x-x_0}{a} & = & \frac{y-y_0}{b} \\ z & = & z_0 \end{array}\right\}.$$

A sík egyenlete.

Adott $\underline{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ és $P\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$. A P ponton átmenő, $\underline{n}$ normálvektorú sík egyenlete:

$$Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0.$$

Altér.

A $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ részhalmazt az $\mathbb{R}^n$ egy alterének nevezzük, ha V zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra nézve.

1. Tartalmazza-e az $R(1; 3; 4)$ pontot az a sík, amelyet a $P(1; 7; -1)$ és a $Q(11; 9; -5)$ pontokat összekötő egyenes a P-ben merőlegesen döf?

2. Határozzuk meg az $S:\ 2x - 3y + 4z = 3$ sík és a következő egyenesek metszetét.

   (a) $\left.\begin{aligned} x &= 11 + 2t \\ y &= -t \\ z &= 29 + 5t \end{aligned}\right\}$

(b) $\dfrac{x-2}{6}=\dfrac{y+1}{8}=\dfrac{z+1}{3}$

3. Határozzuk meg az $x+y+z=5$ és a $2x-y-2z=3$ egyenletű síkok metszetét.

4. Az e egyenesről tudjuk, hogy merőlegesen döfi az $x+2y+3z=6$ egyenletű síkot az $(1,1,1)$ pontban, az f egyenesről pedig, hogy átmegy az $(5,2,-1)$ ponton és a $(13,4,-5)$ ponton. Döntsük el, hogy e-nek és f-nek van-e közös pontja.

5. Döntsük el, hogy a p valós paraméter mely értékére lesz az $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z}{3}$ és az $\frac{x-3}{2}=\frac{y-p}{3}=\frac{z}{4}$ egyenletrendszerű egyeneseknek közös pontja.

6. Párhuzamos-e az $\frac{5x+3}{10}=\frac{4-y}{5}=\frac{5-2z}{2}$ egyenletrendszerű egyenes a $6x+y+7z=91$, illetve az $5x+2y=79$ egyenletű síkok metszésvonalával?

7. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, ami tartalmazza az e egyenest és nincs közös pontja az f egyenessel, ahol e és f egyenletrendszerei az alábbiak.

$$e\colon\ \frac{x-1}{2}=5-y,\ z=2; \qquad f\colon\ \frac{x}{7}=\frac{1-2y}{12}=8-z$$

8. Határozzuk meg az $x-4=\frac{y+5}{4}=\frac{2-z}{3}$ egyenletrendszerű e egyenes minden olyan P pontját, amelyre a P-t a $Q(7,12,4)$ ponttal összekötő f egyenes merőleges e-re.

9. Legyen adott $A(1,0,0)$, $B(1,-2,4)$, és $e\colon\ \frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{3}=z-3$. Keressük meg az e egyenesen azon C pontot, melyre $|\overline{AC}|=|\overline{BC}|$ teljesül.

10. Határozzuk meg a p paraméter értékét és írjuk fel az S sík egyenletét, ha tudjuk, hogy S tartalmazza az $A(1;2;2)$ és $B(3;4;1)$ pontokat és merőleges arra az e egyenesre, aminek az egyenletrendszere $\frac{2x-7}{12}=\frac{8-y}{5}=\frac{z}{p}$.

11. Van-e az $A(-1;-2;1)$, $B(3;1;3)$ és $C(7;6;3)$ pontokat tartalmazó síknak olyan pontja, amely az y-tengelyre esik? Ha igen, melyik?

12. Átmegy-e az origón az az S sík, amely tartalmazza a $P(2;-1;4)$ pontot és az $\frac{x-1}{4}=\frac{1-y}{5}=\frac{z-3}{6}$ egyenletrendszerű e egyenest?

13. Határozzuk meg a térben az $\frac{x+3}{5}=\frac{y+1}{9}=z$ egyenletrendszerű e és az $\frac{x}{4}=\frac{y+8}{6}$, $z=7$ egyenletrendszerű f egyenesek normáltranszverzálisának az egyenletrendszerét – vagyis azét az n egyenesét, amely e-t és f-et is merőlegesen metszi.

14. Döntsük el, hogy az $\mathbb{R}^4$ vektortérben alteret alkotnak-e az alábbi részhalmazok.

(a) $\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\middle|\, x_3=0\right\}$ (b) $\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\middle|\, x_2=1\right\}$

15. Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^4$-ben azok a vektorok, melyek koordinátái (felülről lefelé)

(a) számtani sorozatot alkotnak; (b) mértani sorozatot alkotnak?