Altér, generátorrendszer, lineáris függetlenség

Bevezetés a számításelméletbe 1

6. gyakorlat

2022.

Lineáris kombináció.

Legyen $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. A $\lambda_1 \underline{v}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{v}_k$ vektort a $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ vektorok $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ skalárokkal vett lineáris kombinációjának nevezzük.

Generált altér.

Legyen $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$. A

$$\langle \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k \rangle := \left\{ \lambda_1 \underline{v}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{v}_k \;\middle|\; \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R} \right\}$$

halmazt a $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ vektorok által generált altérnek nevezzük.

Lineáris függetlenség.

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszerről azt mondjuk, hogy lineárisan független, ha

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{v}_k = \underline{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0;$$

ellenkező esetben lineárisan összefüggő vektorrendszerről beszélünk.

Az újonnan érkező vektor lemmája.

Ha az $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_k$ rendszer lineárisan független, de az $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_k, \underline{f}_{k+1}$ rendszer lineárisan összefüggő, akkor $\underline{f}_{k+1} \in \langle \underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_k \rangle$ (vagyis $\underline{f}_{k+1}$ kifejezhető az $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_k$ lineáris kombinációjaként).

1. Legyen

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Kifejezhető-e az $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorokból az $\underline{a}$ vektor?

   (b) Kifejezhető-e az $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorokból az $\underline{b}$ vektor?

   (c) Az $\mathbb{R}^4$ mely vektorai fejezhetőek ki az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorokból?

   (d) Az $\mathbb{R}^4$ mely vektorai fejezhetőek ki az $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorokból?

   (e) Az $\mathbb{R}^4$ mely vektorai fejezhetőek ki az $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ és $\underline{b}$ vektorokból?

2. Az $\mathbb{R}^4$ mely vektorai fejezhetők ki az $(1,1,0,0)$, $(0,1,1,0)$, $(0,0,1,1)$ vektorokból?

3. Legyen

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

   Határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek által generált alteret, majd döntsük el, hogy a vektorrendszerek lineárisan függetlenek-e.

   (a) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ (b) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{a}$ (c) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{b}$

4. Legyen

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek által generált alteret, majd döntsük el, hogy a vektorrendszerek lineárisan függetlenek-e.

(a) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ (b) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{e}$ (c) $\underline{u}, \underline{e}$ (d) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{e}$

5. Döntsük el, hogy lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorrendszerek és határozzuk meg az általuk generált altér egyenletét.

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

6. A p valós paraméter milyen értékeire lineárisan függetlenek-e az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli vektorok?

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ p \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ p \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \underline{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ p \end{pmatrix}$$

7. Generátorrendszert alkotnak-e az alábbi, $\mathbb{R}^3$-beli vektorok?

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

8. Legyen $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineárisan független vektorrendszer egy tetszőleges vektortérben. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $\underline{a} - \underline{b}$, $\underline{a} - \underline{c}$, $\underline{b} + \underline{c}$ vektorrendszer is lineárisan független.

9. Az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek. Következik-e ebből, hogy a $3\underline{a} - \underline{b}$, $2\underline{a} + \underline{c}$ és $4\underline{b} - 3\underline{c}$ vektorok is mindig lineárisan függetlenek?

10. Nevezzünk egy $\mathbb{R}^5$-beli vektort Fibonacci-típusúnak, ha a (felülről számítva) harmadiktól kezdve mindegyik eleme a fölötte álló két elem összege. Így például az alábbi vektor Fibonacci-típusú. Igaz-e, hogy a Fibonacci-típusú vektorok alteret alkotnak $\mathbb{R}^5$-ben?

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

11. Tegyük fel, hogy az $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$, ..., $\underline{u}_m$ vektorok között pontosan egy olyan van, ami kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. Mutassuk meg, hogy ekkor ez a vektor csakis a nullvektor lehet.

12. Az $\mathbb{R}^n$-beli $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ vektorokról tudjuk, hogy az összegük a nullvektor. Bizonyítsuk be, hogy

$$\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{k-1} \rangle = \langle \underline{v}_2, \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_k \rangle.$$

13. Tegyük fel, hogy az ($\mathbb{R}^n$-beli) $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{10}$ vektorok lineárisan összefüggők, de közülük bármely 9-et kiválasztva lineárisan független vektorrendszert kapunk. Mutassuk meg, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{10}$ vektorok bármely $\underline{0}$-t adó lineáris kombinációjában vagy mindegyik együttható 0 vagy egyik együttható sem 0. (Azaz: mutassuk meg, hogy $\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \ldots + \lambda_{10} \cdot \underline{v}_{10} = \underline{0}$ esetén $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{10} = 0$ vagy $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_{10} \neq 0$ teljesül.)

14. Az $\mathbb{R}^n$-beli $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorokról tudjuk, hogy az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok lineárisan függetlenek, de az $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}, \underline{a} - \underline{b} - 3\underline{d}, \underline{a} + \underline{c} + 5\underline{d}$ vektorok lineárisan összefüggők. Következik-e ebből, hogy $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$?