Determináns

Bevezetés a számításelméletbe 1

9. gyakorlat

2023.

Permutáció.

A $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ n-tagú számsorozatot permutációnak nevezzük, ha az $1, \dots, n$ számok mindegyikét pontosan egyszer tartalmazza. Az n-edfokú permutációk halmazát S_n jelöli.

Inverzió.

A $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ permutációban a π_i és a π_j tagok inverzióban állnak, ha $i < j$, de $\pi_i > \pi_j$. A π permutáció inverziószáma az összes inverzióban álló számpárok száma. Ennek jele $I(\pi)$.

Determináns.

Az $n \times n$-es A mátrix determinánsának a $\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{I(\pi)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)}$ értéket nevezzük.

Tétel.

Legyen A egy $n \times n$-es mátrix. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

(i) Ha A felső/alsó háromszögmátrix, akkor $\det(A)$ a főátlóbeli elemek szorzata.

(ii) Ha A egy sora/oszlopa csupa nulla, akkor $\det(A) = 0$.

(iii) Ha A egy sorát/oszlopát λ-val végigszorozzuk, akkor a determináns is λ-val szorzódik.

(iv) Ha A két sorát/oszlopát felcseréljük, akkor a determináns előjelet vált.

(v) Ha A két sora/oszlopa megegyezik, akkor $\det(A) = 0$.

(vi) Ha A egy sorának/oszlopának λ-szorosát hozzáadjuk egy másik sorhoz/oszlophoz, akkor a determináns nem változik.

Tétel.

Legyenek A, B, C $n \times n$-es mátrixok és legyen $i \in \{1, \dots, n\}$ tetszőleges. Ha az A, B, C mátrixok az i-edik sorukat leszámítva megegyeznek, valamint a C mátrix sora éppen az A és a B mátrix i-edik sorának a tagonkénti összege, akkor $\det C = \det A + \det B$.

1. Határozzuk meg az alábbi permutációk inverziószámát.

   (a) $(1, 3, 5, 7, 9, 8, 6, 4, 2)$

   (b) $(n, n-1, \dots, 2, 1)$

   (c) $(21, 22, \dots, 30, 11, 12, \dots 20, 1, 2, \dots, 10)$

2. Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét a determináns definíciója szerint.

   (a)
$$\begin{vmatrix} -5 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ -4 & 9 & 0 & 7 & 3 \\ 6 & 5 & -2 & -6 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

   (b)
$$\begin{vmatrix} 9 & 8 & 5 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 9 & 0 & 8 & 6 \end{vmatrix}$$

3. Számoljuk ki az alábbi determinánsok értékét.

   (a)
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \\ -3 & 3 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 9 & -8 \\ -4 & 4 & 1 & -8 & 3 \end{vmatrix}$$

   (b)
$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & 4 & 11 & -7 \\ -3 & 9 & -5 & -9 & 5 \\ 4 & -12 & 8 & 13 & -2 \\ 5 & -11 & 10 & -1 & -12 \end{vmatrix}$$

   (c)
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 8 \\ 7 & 2 & 9 & 8 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

4. Határozzuk meg azon 4×4-es A mátrix determinánsát, melyben tetszőleges $i, j \in \{1,2,3,4\}$ esetén az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében álló elem

   (a)
   $$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } i = j, \\ 1, & \text{ha } i \neq j; \end{cases}$$

   (b) $a_{ij} = i^2 j^2 + 1$.

5. Legyen A egy nem 0 determinánsú, 9×9-es mátrix, A' pedig az a mátrix, amit A-ból az első sor λ-val való szorzásával kapunk. Mennyi lehet λ értéke, ha tudjuk, hogy $\det(A') = \det(\lambda A)$?

6. A jobbra látható determináns definíció szerinti kiszámításakor

   (a) hány nemnulla szorzat keletkezik;

   (b) milyen előjelet kap az a szorzat, amelynek az egyik tényezője 3?

   $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

7. Határozzuk meg $(\det A + \det B)$ értékét, ahol A és B az alábbi mátrixok.

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 13 & 19 \\ 1 & 4 & 6 & 23 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 16 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 13 & 19 \\ 1 & 4 & 6 & 23 \end{pmatrix}$$

8. Valaki négyszer egymás után kiszámolta az alábbi determináns értékét és négy különböző eredményt kapott: 1020, 2022, 3024 és 4026. Végül számítógéppel ellenőrizve kiderült, hogy a négy eredmény közül az egyik valóban helyes. Melyik?

   $$\begin{vmatrix} -6 & 2 & -6 & -6 \\ 12 & 14 & 18 & 12 \\ -6 & 14 & -16 & -8 \\ 6 & 4 & 22 & 10 \end{vmatrix}$$

9. A 6×6-os A mátrix főátlójában és alatta minden elem 1-es, a jobb felső sarkában álló elem 2018, a mátrix összes többi (14 darab) eleme pedig 0. Határozzuk meg A determinánsát.

10. Egy $n \times n$-es A mátrixban az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében álló elem $a_{ij} = i^2 j^2 + 1$. Határozzuk meg A determinánsát.

11. Legyen $\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)$ az $1, 2, \ldots, n$ számok egy tetszőleges permutációja. Készítsük el az $n \times n$-es A mátrixot a következőképpen: minden $i = 1, 2, \ldots, n$-re a mátrix i-edik sorában a $\pi(i)$-edik helyen és attól jobbra mindenhol álljon 1-es, a $\pi(i)$-edik helytől balra pedig mindenhol álljon 0. Határozzuk meg A determinánsát.

12. Egy 101×101-es A mátrixban az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében álló elem

    $$a_{ij} = \begin{cases} 3^{2004}\text{-nek a } (2i+j)\text{-edik számjegye}, & \text{ha } i \cdot j \text{ páros}, \\ 0, & \text{ha } i \cdot j \text{ páratlan}. \end{cases}$$

    Határozzuk meg A determinánsát.

13. Az alábbi A mátrixra $\det A = 45653$. Mennyi $\det B$ értéke?

    $$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 8 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 7 & 6 & 9 \\ 6 & 4 & 3 & 1 & 8 & 3 \\ 8 & 3 & 0 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 9 & 8 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 8 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 1 & 7 & 3 & 9 \\ 6 & 8 & 3 & 2 & 8 & 6 \\ 4 & 3 & 0 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 7 & 6 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 9 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

14. Bizonyítsuk be, hogy

    $$\begin{vmatrix} 1849 & 1444 & 1896 & 1222 \\ 1490 & 1703 & 1790 & 1526 \\ 1342 & 1566 & 1541 & 1514 \\ 1242 & 1552 & 1382 & 1825 \end{vmatrix} \neq 0.$$

15. Egy $n \times n$-es mátrix minden eleme 1 vagy -1. Bizonyítsuk be, hogy a determinánsa osztható 2^{n-1}-nel.