# Bevezetés a számításelméletbe 1

Konzultáció

2023.

1. Határozzuk meg az összes olyan $n$ egészt 1 és 1000 között, amelyre $n+10$ 36-tal osztva, $n-10$ pedig 38-cal osztva ad 1 maradékot.

2. Mennyi maradékot ad 363-mal osztva $4^{444}$?

3. Határozzuk meg $78^{79^{80}}$ ötös számrendszerben felírt alakjának utolsó három számjegyét.

4. Milyen maradékot ad $4^{74}$ 70-nel osztva?

5. Az origón áthaladó $S$ sík tartalmazza az $\frac{x-4}{9}=\frac{3-y}{2}=\frac{z-1}{6}$ egyenletrendszerű $e$ egyenest. Rajta van-e a $P(9;5;3)$ pont az $S$ síkon?

6. Az $e$ egyenes egyenletrendszere $x=y=\frac{z-3}{2}$, az $f$ egyenes egyenletrendszere $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=z+p$, ahol $p\in\mathbb{R}$. Adjuk meg azon $p$ értékeket, melyekre $e$ és $f$ metszik egymást.

7. Legyenek $V$ és $W$ $\mathbb{R}^n$ tetszőleges alterei. Bizonyítsuk be, hogy $V\cup W$ akkor és csak akkor altere $\mathbb{R}^n$-nek, ha $V\subseteq W$ vagy $W\subseteq V$ fennáll.

8. Tudjuk, hogy az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorrendszer lineárisan független $\mathbb{R}^n$-ben. Következik-e ebből, hogy a $2\underline{a}+\underline{b}$, $2\underline{b}+\underline{c}$, $2\underline{c}+\underline{a}$ rendszer is lineárisan független?

9. Tegyük fel, hogy a $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_{10},\underline{w}\in\mathbb{R}^n$ vektorokra teljesül, hogy a $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_{10}$ rendszer lineárisan független, a $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_{10},\underline{w}$ rendszer viszont lineárisan összefüggő és $\underline{w}\neq\underline{0}$. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $1\le i\le 10$ és olyan $\alpha\neq 0$ skalár, hogy a

$$\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_{i-1},\underline{v}_i+\alpha\cdot\underline{w},\underline{v}_{i+1},\dots,\underline{v}_{10}$$

rendszer lineárisan összefüggő.

10. Legyenek $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ az alábbi $\mathbb{R}^4$-beli vektorok. Az $\langle\underline{u},\underline{v},\underline{w}\rangle$ generált altér $\underline{a}$ elemének első két koordinátája 1. Határozzuk meg az $\underline{a}$ koordinátáinak az összegét.

$$\underline{u}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix},\qquad \underline{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\-4\\0\end{pmatrix},\qquad \underline{w}=\begin{pmatrix}0\\0\\5\\-5\end{pmatrix}$$

11. Nevezzünk egy $\mathbb{R}^n$-beli $\underline{v}$ vektort palindrómának, ha $\underline{v}$ koordinátáit fordított sorrendben felírva ugyancsak $\underline{v}$-t kapjuk (palindróma például az alábbi vektor). Mutassuk meg, hogy az $\mathbb{R}^5$-beli palindrómák halmaza altér $\mathbb{R}^5$-ben. Amennyiben alteret alkotnak, határozzuk meg ennek az altérnek a dimenzióját, valamint adjuk ennek az altérnek ey olyan bázisát, amely tartalmazza az alábbi vektort.

$$\underline{u}=\begin{pmatrix}5\\1\\2\\1\\5\end{pmatrix}$$