

BEVEZETÉS A SZÁMÍTÁSELMÉLETBE 1

Konzultáció

2023.

1. Döntsük el, hogy a p valós paraméter mely értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, akkor adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} px_1 + px_2 + px_3 &= p \\ 2x_1 + 6x_2 + 10x_3 &= 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + (p+3)x_3 &= 3 \end{aligned}$$

2. Az $A \in \mathbb{R}^{42 \times 42}$ mátrixnak minden olyan eleme 42, ami közvetlenül a főátló alatt vagy felett áll, A minden más eleme 0. Határozzuk meg A determinánsát.
3. Számítsuk ki a jobbra látható determináns értékét az a, b tetszőleges valós paraméterek minden értékére.

$$\begin{vmatrix} a & 2a & 4a & 9a \\ b & 2b & 5b & 10b \\ 1 & 3 & 6 & 12 \\ 3 & 6 & 12 & 20 \end{vmatrix}$$

4. Az 5×3 -as A mátrixra teljesül, hogy az $A \cdot A^T$ mátrix bal alsó sarkában álló elem 2015. Mi állhat az $A \cdot A^T$ mátrix jobb felső sarkában?
5. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 42 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Van-e olyan $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mátrix, amire $AB = C$? Ha van, akkor számítsuk ki $|B|$ -t.

6. Létezik-e inverze az alábbi A mátrixnak? Ha igen, akkor határozzuk meg A inverzét, valamint A inverzének a rangját.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -13 & 15 & -7 \\ 7 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

7. Határozzuk meg az alábbi A mátrix rangját az x valós paraméter minden értékére.

$$A = \begin{pmatrix} x & x & 1 & x & x \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Legyen V az \mathbb{R}^k egy altere, C egy $k \times n$ -es, A pedig egy $n \times n$ -es mátrix. Tegyük fel tovább, hogy a $C \cdot A$ mátrix minden oszlopa V -beli, de a C mátrixnak van olyan oszlopa, ami nem eleme V -nek. Mutassuk meg, hogy ekkor $\det A = 0$.
9. Egy 10 egyenletből álló, 10 ismeretlenes lineáris egyenletrendszer a kibővített együtthatómátrixával van megadva. Tudjuk, hogy az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.

- (a) Igaz-e, hogy minden esetben elérhető a kibővített együtthatómátrix egy elemének megváltoztatásával, hogy az egyenletrendszernek egyértelmű megoldása legyen?
 - (b) Igaz-e, hogy minden esetben elérhető a kibővített együtthatómátrix egy elemének megváltoztatásával, hogy az egyenletrendszernek ne legyen megoldása?
10. Nevezünk egy 4×4 -es mátrixot szépen kiegészíthetőnek, ha ki tudjuk egészíteni (egy-egy plusz sorral és oszloppal) 5×5 -ös invertálható mátrixszá. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak-e.
- (a) Ha egy 4×4 -es mátrix szépen kiegészíthető, akkor a rangja legalább 3.
 - (b) Ha egy 4×4 -es mátrix rangja legalább 3, akkor a mátrix szépen kiegészíthető.