

Vektortér, altér

Bevezetés a számításelméletbe 1.

2. gyakorlat

2013. szeptember 17.

Vektortér: A V halmazt \mathbb{R} feletti vektortérnek nevezzük, ha

$\forall u, v, w \in V$:

$$(\text{ö1}) \quad u + (v + w) = (u + v) + w$$

$$(\text{ö2}) \quad u + v = v + u$$

$$(\text{ö3}) \quad \exists 0 \in V \quad \forall v \in V : v + 0 = v$$

$$(\text{ö4}) \quad \forall v \in V \quad \exists -v \in V : v + (-v) = 0$$

$\forall \lambda, \kappa \in \mathbb{R}, \forall v, u \in V$:

$$(\text{sz1}) \quad (\lambda + \kappa)v = \lambda v + \kappa v$$

$$(\text{sz2}) \quad \lambda(v + u) = \lambda v + \lambda u$$

$$(\text{sz3}) \quad (\lambda \kappa)v = \lambda(\kappa v)$$

$$(\text{sz4}) \quad 1v = v$$

Megj. V -nek zártnak kell lennie az összeadásra és a skalárral való szorzásra nézve.

Altér: A $W \subseteq V$ részhalmaz a V valós vektortér altere, ha W is valós vektortér a V vektortér műveleteire.

Áll. Ha V vektortér, akkor $\emptyset \neq W \subseteq V$ pontosan akkor altere V -nek, ha zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra nézve.

1. Vektorteret alkotnak-e az alábbi halmazok a szokásos összeadásra nézve a valós számok teste felett?
 - (a) racionális számok
 - (b) a legfeljebb n -edfokú egyváltozós polinomok
 - (c) a folytonos függvények ($\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)
 - (d) a deriválható függvények ($\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)
 - (e) páros függvények ($\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)
 - (f) $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(5) \leq 0\}$
 - (g) $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(5) = f(8)\}$
 - (h) azok a legfeljebb hatodfokú polinomok, melyeknek egyik gyöke a $\sqrt{2}$

2. Legyen $V = \mathbb{R}^2$ a síkvektorok halmaza. Legyen V -n a \oplus művelet a síkvektorok hagyományos összeadása; értelmezzük továbbá tetszőleges $\underline{v} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén a \odot szorzást az alábbiak szerint:

$$\lambda \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot y \\ \lambda \cdot x \end{pmatrix}.$$

Vektorteret alkot-e V az így definiált \oplus és \odot műveletekkel?

3. Legyen $V = \mathbb{R}^2$ a síkvektorok halmaza. Tetszőleges $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in V$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén a \oplus összeadást és a \odot szorzást az alábbiak szerint:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \end{pmatrix}, \quad \lambda \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \lambda \cdot y_1 \end{pmatrix}.$$

Vektorteret alkot-e V az így definiált \oplus és \odot műveletekkel?

4. Legyen $V = \mathbb{R}$ a valós számok halmaza. Értelmezzük V -n a \oplus vektorösszeadást és a vektorok valós számmal való \odot szorzását a következőképpen: $u \oplus v = u + v + 1$ és $\lambda \odot v = \lambda \cdot v + \lambda - 1$. (A műveletek értelmezésében szereplő $+$ és \cdot a valós számok szokásos összeadását és szorzását jelölik.) Döntsük el, hogy V vektorteret alkot-e a \oplus és \odot műveletekkel!
5. Döntsük el, hogy az \mathbb{R}^4 vektortérben alteret alkotnak-e az alábbi részhalmazok!

$$(a) \left\{ \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right) \middle| x_3 = 0 \right\}$$

$$(b) \left\{ \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right) \middle| x_2 = 1 \right\}$$

6. A valós számhármások vektorterében alteret alkotnak-e azok az $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ vektorok, melyekre $x_1 = 2x_2 - 3x_3$?