Permutációk, determináns

Bevezetés a számításelméletbe 1.
5. gyakorlat

2013. október 8.

Permutáció: n-edfokú permutáción egy $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ bijektív leképezést értünk. Jelölés: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$. Az n-edfokú permutációk halmazát S_n jelöli.

Inverzió: Az i, j elemek ($i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$) inverzióban állnak, ha $i < j$ esetén $\sigma(i) > \sigma(j)$. A σ permutáció inverziószámát (inverzióban álló számpárok számát) $I(\sigma)$ jelöli. Azt mondjuk, hogy σ páros permutáció, ha $I(\sigma)$ páros, ellenkező esetben σ-t páratlan permutációnak nevezzük.

Determináns: Az $n \times n$-es A mátrix determinánsán a $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ szorzatösszeget értjük.

Tétel: Legyen A $n \times n$-es mátrix.

i. $\det(A) = \det(A^T)$

ii. Ha A felső/alsó háromszögmátrix, akkor $\det(A)$ a főátlóbeli elemek szorzata.

iii. Ha A egy sora/oszlopa csupa nulla, akkor $\det(A) = 0$.

iv. Ha A egy sorát/oszlopát λ-val végigszorozzuk, akkor a determináns is λ-val szorzódik.

v. Ha A két sorát/oszlopát felcseréljük, akkor a determináns előjelet vált.

vi. Ha A két sora/oszlopa megegyezik, akkor $\det(A) = 0$.

vii. Ha A egy sorának λ-szorosát hozzáadjuk egy másik sorhoz, akkor a determináns nem változik.

1. Határozzuk meg az inverziók számát az $1, 2, \dots, n$ elemek következő permutációiban!
   (a) $1, 3, 5, 7, 9, 8, 6, 4, 2; (n = 9)$
   (b) $n, n-1, \dots, 2, 1;$
   (c) $21, 22, \dots, 30, 11, 12, \dots 20, 1, 2, \dots, 10$

2. Legyen σ az $1, 2, \dots, 100$ számok egy permutációja, és legyen σ' az a permutáció, amire $\sigma' = \begin{cases} \sigma(i) + 1, & \text{ha } 1 \le \sigma(i) \le 99 \\ 1, & \text{ha } \sigma(i) = 100 \end{cases}$. Igazoljuk, hogy a σ és σ' permutációk $I(\sigma)$ és $I(\sigma')$ inverziószámai ellenkező paritásúak.

3. Legyen $\sigma : \{1, 2, \dots, 2n\} \to \{1, 2, \dots, 2n\}$ az a permutáció, amire

$$\sigma(i) = \begin{cases} 2i, & \text{ha } i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ 2i - n - 1, & \text{ha } i \in \{n+1, n+2, \dots, 2n\} \end{cases}$$

teljesül. Határozzuk meg az $I(\sigma)$ inverziószámot.

4. Számoljuk ki az alábbi determinánsok értékét!

(a)
$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

(b)
$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(c)
$$\begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 2 & 6 & 12 & 20 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

(d)
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 8 \\ 7 & 2 & 9 & 8 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

(e)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix}$$

(f)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2n \\ 3 & 6 & 9 & \dots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 2n & 3n & \dots & n^2 \end{vmatrix}$$

(g)
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

(h)
$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \\ 4 & 1 & 6 & 20 \end{vmatrix}$$

(i)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 8 \end{vmatrix}$$

5. Az alábbi determináns definíció szerinti kiszámításakor

   (a) hány nemnulla szorzat keletkezik;

   (b) milyen előjelet kap az a szorzat, amelynek az egyik tényezője 3?

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

6. Legyen A olyan 40×40 méretű mátrix, aminek a bal felső 18×23-as részmátrixában csupa 0 áll. Bizonyítsuk be, hogy $\det A = 0$.

7. Legyen A egy nem 0 determinánsú, 9×9-es mátrix, A' pedig az a mátrix, amit A-ból az első sor λ-val való szorzásával kapunk. Mennyi lehet λ értéke, ha tudjuk, hogy $\det(A') = \det(\lambda A)$?

8. Legyen $\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)$ az $1, 2, \dots, n$ számok egy tetszőleges permutációja. Készítsük el az $n \times n$-es A mátrixot a következőképpen: minden $i = 1, 2, \dots, n$-re a mátrix i-edik sorában a $\pi(i)$-edik helyen és attól jobbra mindenhol álljon 1-es, a $\pi(i)$-edik helytől balra pedig mindenhol álljon 0. Határozzuk meg A determinánsát!