Determináns, mátrixok

Bevezetés a számításelméletbe 1.
6. gyakorlat

2013. október 15.

Kifejtési tétel: Ha A $n \times n$-es mátrix és $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ rögzített, akkor $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ (i-edik sor szerinti kifejtés); ha $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ rögzített, akkor $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ (j-edik oszlop szerinti kifejtés).

Egy $n \times n$-es A mátrix esetén tetszőleges $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$ indexekre $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0$, illetve $\sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = 0$ (ferde kifejtés).

Determinánsok szorzástétele: Ha A, B $n \times n$-es valós mátrixok, akkor $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Áll. Ha A $m \times n$-es, B $n \times k$-as mátrix, akkor $(AB)^T = B^T A^T$.

1. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ és $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Adjuk meg az AB, AC, CA, $A + B$ mátrixokat!

2. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ és $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Adjuk meg az AB, BC mátrixokat!

3. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$. Ellenőrizzük, hogy $A^2 \cdot B^2 \neq (AB)^2$.

4. Adjuk meg az összes olyan B mátrixot, amire az $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix esetén $AB = BA$ teljesül.

5. A 100×100-as A mátrix első 50 oszlopának minden eleme 3, az utolsó 50 oszlop minden eleme 2. A 100×100-as B mátrix minden oszlopára teljesül, hogy abban az első 50 elem összege 2, az utolsó 50 elem összege 3. Határozzuk meg az AB szorzatot.

6. Számoljuk ki az alábbi determinánsok értékét a kifejtési tétel felhasználásával!

(a)

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

7. Létezik-e olyan 5×5-ös mátrix, melynek

   (a) egyetlen eleme sem 0 és minden előjeles aldeterminánsa 0?

   (b) egyetlen eleme sem 0 és pontosan egy olyan előjeles aldeterminánsa van, mely nem 0?