Mátrixok rangja;
Lineáris leképezések

Bevezetés a számításelméletbe 1.
8. gyakorlat

2013. október 29.

Lineáris leképezés: Az U, V valós vektorterek között ható $\mathcal{A} : U \to V$ függvény egy lineáris leképezés, ha

i. $\forall u_1, u_2 \in U : \mathcal{A}(u_1 + u_2) = \mathcal{A}(u_1) + \mathcal{A}(u_2)$,

ii. $\forall \lambda \in \mathbb{R} \forall u_1 \in U : \mathcal{A}(\lambda u) = \lambda \mathcal{A}(u)$.

1. Számoljuk ki a következő mátrixok rangját!

   (a)
   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \end{pmatrix}$$

   (b)
   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Számoljuk ki a következő mátrixok rangját a c valós paraméter függvényében!

   (a)
   $$\begin{pmatrix} c & 2 & 3 \\ 21 & 12 & 18 \\ -14 & -8 & -12 \end{pmatrix}$$

   (b)
   $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2c+7 & 3c-2 & -5 \end{pmatrix}$$

3. Az $n \times n$-es A mátrixra $A^2 = 0$ teljesül. Lehet-e A rangja n?

4. Tegyük fel, hogy az A mátrix minden sora számtani sorozat. (Vagyis bármelyik sor elemein balról jobbra végighaladva egy-egy számtani sorozat tagjait kapjuk.) Bizonyítsuk be, hogy $r(A) \leq 2$.

5. Lineáris leképezés-e a sík vektorain az $\mathcal{A}$ megfeleltetés, amely az (x, y) koordinátájú vektorhoz az

   (a) $(y, 3x)$
   (b) (x^2, y^2)

   vektort rendeli?

6. A sík egy $\mathcal{A}$ lineáris transzformációjáról azt tudjuk, hogy az $(5, 3)$ vektor képe a $(2, 3)$ vektor, a $(4, 3)$ vektoré pedig a $(3, 2)$ vektor. Mi lesz a $(11, 6)$ vektor képe?