Gyakorlás

Bevezetés a számításelméletbe 1.
Konzultáció

2013. október 21.

1. Legyen adott a térben az $\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ és a $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ vektor. Döntsük el, hogy az $< \underline{a}, \underline{b} >$ altér egyenest vagy síkot határoz-e meg és írjuk fel a kapott geometriai alakzat egyenletét vagy egyenletrendszerét.

2. Határozzuk meg a három koordinátatengellyel vett metszéspontjait annak a síknak, mely átmegy a $(3, 4, 5)$ ponton és merőleges az origóból a $(3, 4, 5)$ koordinátájú pontba mutató vektorra!

3. Egy síkra esnek-e a térben az $A(1; 5; 3)$, $B(7; 11; -5)$, $C(10; 14; -9)$ és $D(12; 6; -15)$ pontok?

4. Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(1; 3; 4)$ és a $Q(3; 6; 10)$ pontokon és párhuzamos az $\frac{x-9}{3} = y + 4 = \frac{z}{5}$ egyenletrendszerű egyenessel!

5. Legyen M azon 2×3–as mátrixok halmaza, melyekben a bal alsó és a jobb felső elemek összege legalább akkora, mint a bal felső és a jobb alsó elemek összege. Igaz-e, hogy a szokásos mátrixösszeadás és skalárral szorzás műveletekkel M vektorteret alkot?

6. Vektorteret alkotnak-e a szokásos műveletekkel azok a valós polinomok, melyekben a harmadfokú és az ötödfokú tag együtthatójának összege 0?

7. Nevezzünk egy $\mathbb{R}^5$-beli vektort Fibonacci-típusúnak, ha a (felülről számítva) harmadiktól kezdve mindegyik eleme a fölötte álló két elem összege. Így például az alábbi vektor Fibonacci-típusú. Igaz-e, hogy a Fibonacci-típusú vektorok alteret alkotnak $\mathbb{R}^5$-ben? Ha altér, akkor határozzuk meg a dimenzióját!

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

8. Adjuk meg $\mathbb{R}^3$ egy olyan bázisát, ami tartalmazza a $(2; 3; 4)$ vektort.

9. Tudjuk, hogy egy vektortérben a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{100}$ vektorok bázist alkotnak. Hány dimenziós a $< \underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_2 + \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_{99} + \underline{v}_{100}, \underline{v}_{100} + \underline{v}_1 >$ altér?

10. A V vektortér két alterének, V_1-nek és V_2-nek a nullvektor az egyetlen közös eleme. Bizonyítsuk be, hogy $\dim V_1 + \dim V_2 \leq \dim V$.

11. Az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ és a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4$ vektorok generálják ugyanazt a V vektorteret, vagyis $< \underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3 >=< \underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4 >= V$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az alábbi négy vektorból álló vektorrendszer lineárisan összefüggő: $\underline{a}_1 + \underline{a}_2, \underline{a}_3 + \underline{b}_1, \underline{a}_3 + \underline{b}_2, \underline{b}_3 + \underline{b}_4$.

12. Tegyük fel, hogy $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4\}$ a V vektortér egy bázisa, és legyen $\underline{b} = \underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \underline{b}_3 + \underline{b}_4$. Mutassuk meg, hogy $\{\underline{b}_1 + \underline{b}, \underline{b}_2 + \underline{b}, \underline{b}_3 + \underline{b}, \underline{b}_4 + \underline{b}\}$ is bázis V-ben!

13. Döntsük el, hogy a c valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek! Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset!

$$\begin{gathered}
-x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 1 \\
5x_1 + 15x_2 - 2x_3 + 26x_4 = 4 \\
2x_1 + 6x_2 + cx_4 = 4 \\
4x_1 + 12x_2 + x_3 + (c+14)x_4 = 11
\end{gathered}$$

14. Hogyan változik meg az $n \times n$-es valós elemű mátrix determinánsa, ha minden elemét az ellentettjére cseréljük?

15. Egy $n \times n$-es A mátrixban az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében álló elem $a_{ij} = i^2 j^2 + 1$. Határozzuk meg A determinánsát!

16. Egy 101×101-es A mátrixban az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében álló elem

$$a_{ij} = \begin{cases} 3^{2004}\text{-nek a } (2i+j)\text{-edik számjegye,} & \text{ha } i \cdot j \text{ páros,} \\ 0, & \text{ha } i \cdot j \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Határozzuk meg A determinánsát!

17. Egy 5×5-ös mátrix determinánsának definíció szerinti kiszámításakor 30 nullától különböző szorzatot kapunk. Igaz-e, hogy ekkor a mátrix legfeljebb 15 nullát tartalmaz?

18. Tegyük fel, hogy a 10×10 méretű A valós mátrix minden sorösszege és minden oszlopösszege egyaránt 10. Készítsük el a 11×11 méretű A' mátrixot úgy, hogy A-hoz jobbról hozzáírunk egy csupa 1-esekből álló oszlopot, majd a kapott mátrix alá írunk egy csupa 10-esből álló sort. Mutassuk meg, hogy $\det(A') = 0$.

19. Egy $n \times n$-es mátrix minden sorában az elemek összege 2008. Bizonyítsuk be, hogy ha a mátrix egyik oszlopának minden elemét kicseréljük 1-esre, akkor az így kapott új mátrix determinánsa 2008-adrésze lesz az eredeti mátrix determinánsának.