

Síkbarajzolható gráfok  
Bevezetés a számításelméletbe 2  
3. gyakorlat  
2016. március 1.

**Euler-formula**

Ha egy  $k$  komponensű síkgráfnak  $n$  csúcsa,  $e$  éle és  $t$  tartománya van, akkor  $n - e + t = k + 1$ .

Ha egy összefüggő síkgráfnak  $n$  csúcsa,  $e$  éle és  $t$  tartománya van, akkor teljesül rá, hogy  $n - e + t = 2$ .

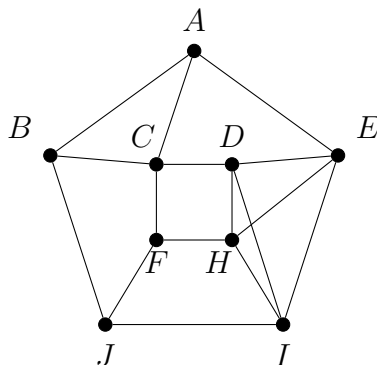
**Állítás**

Ha a  $G$  egyszerű síkgráfnak legalább 3 csúcsa van, akkor az előbbi jelölésekkel  $e \leq 3n - 6$ ; illetve ha a gráf minden köre legalább négy hosszú, akkor  $e \leq 2n - 4$ .

**Kuratowski-tétel**

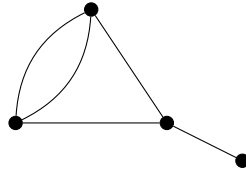
Egy gráf akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmaz olyan részgráfot, amely topologikusan izomorf  $K_{3,3}$ -mal vagy  $K_5$ -tel.

1. Hány csúcsa van annak a síkgráfnak, amit három háromszög-, három négyszög- és egy ötszöglap határol?
2. Síkbarajzolhatók-e a  $K_6$ ,  $K_{4,2}$ ,  $K_{4,3}$ ,  $K_5 - e$ ,  $K_{3,3} - e$ ,  $\overline{C_7}$  gráfok?
3. Síkbarajzolható-e az alábbi gráf? Ha igen, rajzoljuk le a síkba úgy, hogy az élei egyenes szakaszok legyenek; ha nem, akkor bizonyítsuk ezt be.

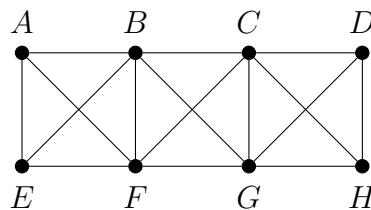


4. Mutassuk meg, hogy ha  $|V(G)| \geq 11$ , akkor  $G$  és  $\overline{G}$  egyike biztosan nem síkgráf.
5. Egy mezőn  $k$  ház és  $k$  kút áll. Minden háztól pontosan 4 (különböző) kúthoz vezet (közvetlenül) út. Mutassuk meg, hogy biztosan van két olyan út, amelyek keresztezik egymást!
6. Bizonyítsuk be, hogy minden egyszerű síkgráfban
  - (a) a minimális fokszám legfeljebb 5;
  - (b) ha a minimális fokszám 5, akkor legalább 12 ötödfokú csúcs van.

7. Tegyük fel, hogy a  $G$  egyszerű gráf három olyan feszítőfát tartalmaz, amiknek nincs közös éle. Bizonyítsuk be, hogy ekkor  $G$  tartalmaz topologikus  $K_5$ -öt vagy topologikus  $K_{3,3}$ -at!
8. Egy gráfban minden pont foka legfeljebb 3, és minden köre legfeljebb 5 hosszú. Mutassuk meg, hogy a gráf síkgráf!
9. Készítsük el az alábbi gráf (ezen lerajzolásához tartozó) duálisát.



10. Mutassunk olyan síkgráfot, ami nem duális a duálisának?
11. Van-e olyan egyszerű síkgráf, aminek feleannyi csúcsa van, mint a duálisának?
12. Maximálisan hány élet lehet hozzávenni az alábbi gráfhoz úgy, hogy egyszerű, síkbarajzolható gráfot kapjunk? (Egy él hozzávétele azt jelenti, hogy két meglévő csúcs közé húzunk be új élet, a gráfhoz további csúcsokat hozzávenni tehát nem szabad.)



13. Egy síkságon öt ház és öt kút áll. Minden háztól minden kúthoz külön ösvényt kell építenünk. Az építendő ösvények némelyike keresztezheti egymást, de egy-egy kereszteződésben legfeljebb két ösvény találkozhat. Mutassuk meg, hogy ekkor kilencnél kevesebb kereszteződéssel biztosan nem oldható meg a feladat. (Hidak, alagutak nem építhetők, minden ösvényt a felszínen kell vezetni.)