Intervallumgráfok, görög betűk

Bevezetés a számításelméletbe 2
7. gyakorlat
2016. április 5.

Tétel

Minden G intervallumgráfra $\chi(G) = \omega(G)$ teljesül.

Állítás

Minden G gráfra $\nu(G) \leq \tau(G)$ teljesül.

Állítás

Minden G gráfra $\alpha(G) \leq \rho(G)$ teljesül.

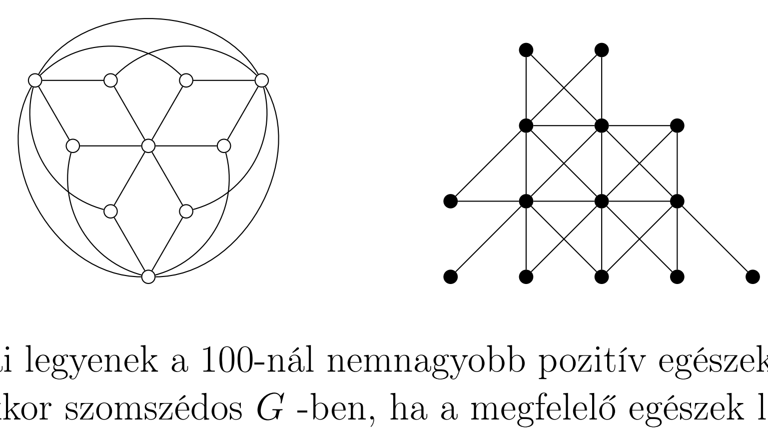
1. Döntsük el, hogy az alábbi gráfok intervallumgráfok-e.

2. Létezik-e 5 csúcsú, 8 élű intervallumgráf?

3. Tekintsük azokat az intervallumokat a számegyenesen, amelyeknek mindkét végpontja 1 és 100 közötti egész szám, a hosszuk legalább 1 és legfeljebb 4, valamint legalább az egyik végpontjuk páros szám. Határozzuk meg az ezek által meghatározott intervallumgráf kromatikus számát!

4. Egy adott intervallumrendszerhez tartozó intervallumgráf kromatikus száma 10. Mutassuk meg, hogy ha az intervallumrendszerből törlünk néhány olyan intervallumot, melyek közt semelyik háromnak nincs közös pontja, akkor a visszamaradó intervallumrendszerhez tartozó intervallumgráf kromatikus száma legalább 8.

5. Adjunk meg egy maximális független élhalmazt és csúcshalmazt, valamint egy minimális lefogó csúcshalmazt és élhalmazt az alábbi gráfokban.



6. Egy G gráf csúcsai legyenek a 100-nál nemnagyobb pozitív egészek. Két különböző csúcs pontosan akkor szomszédos G -ben, ha a megfelelő egészek legnagyobb közös osztója pontosan 2. Határozzuk meg $\nu(G)$-t és $\tau(G)$-t.

7. Mennyi az $\alpha(G) + \nu(G)$ lehetséges legnagyobb értéke, ha G tetszőleges 100 csúcsú gráf lehet?

8. Egy 11 csúcsú fában minden csúcs foka legfeljebb 3. Mutassuk meg, hogy a fában van 4 élű párosítás.

9. Jelölje G_8 azt a Mycielski-konstrukció által készített gráfot, amelyre $\chi(G_8) = 8$. Ekkor G_8-nak 191 csúcsa van. Határozzuk meg $\nu(G_8)$, vagyis a G_8-beli független élek maximális számának értékét!

10. Mutassuk meg, hogy ha egy G gráf valamely párosítása tovább már nem bővíthető (azaz nincs olyan él a gráfban, melyet hozzávéve párosítás marad), akkor legalább feleannyi élet tartalmaz, mint G egy maximális párosítása.

11. Legyen G és H két gráf ugyanazon a V csúcshalmazon, J pedig az a gráf, melynek csúcshalmaza szintén V, élhalmaza pedig G és H élhalmazainak uniója. Mutassuk meg, hogy $\chi(J) \leq \chi(G) + \tau(H)$.

12. A $2k$ csúcsú G egyszerű gráfban a nemszomszédos u és v csúcsok foka $k-1$, az összes többi csúcs foka legalább k (ahol $k > 1$ egész). Mutassuk meg, hogy G-ben van teljes párosítás.

13. Legyen G páros gráf és $e = \{u, v\}$ egy éle G-nek. Igazak-e mindig az alábbi állítások?

    (a) Ha van olyan maximális elemszámú párosítás G-ben, amely e-t tartalmazza, akkor nincs olyan minimális elemszámú lefogó ponthalmaz G-ben, amely u-t és v-t is tartalmazza.

    (b) Ha nincs olyan minimális elemszámú lefogó ponthalmaz G-ben, amely u-t és v-t is tartalmazza, akkor van olyan maximális elemszámú párosítás G-ben, amely e-t tartalmazza.