Párosítások

Bevezetés a számításelméletbe 2
8. gyakorlat
2016. április 12.

Frobenius-tétel

Egy $G = (A, B, E)$ páros gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha $|A| = |B|$ és minden $X \subseteq A$ részhalmazra $|X| \leq |N(X)|$ teljesül.

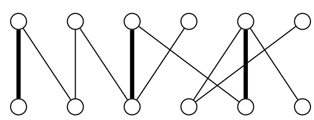
Hall-tétel

Egy $G = (A, B, E)$ páros gráfban akkor és csak akkor van A-t lefedő párosítás, ha minden $X \subseteq A$ részhalmazra $|X| \leq |N(X)|$ teljesül.

Tutte-tétel

Egy G gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha tetszőleges $X \subset V$ esetén $C_p(G-X) \leq |X|$, ahol $C_p(G-X)$ a $G-X$ gráf páratlan méretű komponenseinek a száma.

1. Az ábrán látható G gráfban keressünk maximális párosítást a javító utas algoritmussal a vastag vonalakkal jelölt párosításból kiindulva, valamint adjunk meg egy minimális lefogó ponthalmazt is.



2. Egy $G(A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_9\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_9\}$. Minden $1 \leq i \leq 9$ és $1 \leq j \leq 9$ esetén a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha az alábbi mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg G-ben egy maximális párosítást és egy minimális lefogó csúcshalmazt.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Tegyük fel, hogy a 88 pontú G páros gráfban $\alpha(G) = 44$. Igazoljuk, hogy G-re teljesül a Hall-feltétel, azaz $|X| \leq |N(X)|$ az A színosztály minden X részhalmaza esetén.

4. Egy kiránduláson a résztvevő n házaspár között akarunk szétosztani $2n$ különböző csokoládét úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy mindenki legalább n fajtát szeret a csokoládék közül, és hogy minden csokoládét minden házaspárnak legalább az egyik tagja szereti. Bizonyítsuk be, hogy a csokoládék kioszthatók úgy, hogy mindenki olyat kapjon, amilyet szeret.

5. G egy páros gráf, A és B osztályokkal, és minden $X \subseteq A$ halmazra $|N(X)| \geq |X| - 1$. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz olyan párosítást, ami A-t egy pont kivételével lefedi.

6. G egy páros gráf, A és B színosztályokkal. A-ban minden pont foka 40, B-ben 30.

   (a) Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz A-t fedő párosítást.

   (b) Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz 10 éldiszjunkt A-t fedő párosítást.

7. Egy 10 csúcsú páros gráfban minden csúcs foka 3 vagy 4. Mutassuk meg, hogy a gráfban van teljes párosítás.

8. A $G(A, B; E)$ egyszerű, páros gráfban $|A| = |B| = n$ (valamely $n \geq 1$ egészre) és bármely nemszomszédos $u \in A$ és $v \in B$ csúcsok esetén $d(u) + d(v) \geq n$ teljesül. Mutassuk meg, hogy G -ben van teljes párosítás!

9. Valaki találomra szétosztott egy pakli francia kártyát 13 darab 4 lapból álló csomagba. Bizonyítsuk be, hogy ekkor mindegyik csomagból kiválasztható egy lap úgy, hogy a kiválasztott lapok között mindegyik fajta figurából éppen egy legyen (vagyis egy 2-es, egy 3-as, stb., egy ász).

10. Egy szigeten n család lakik. A sziget elöljárói felosztották az egész szigetet n egyenlő területű vadászati körzetre és ezzel egyidejűleg (az előbbitől függetlenül, ezért egészen más módon) felosztották az egész szigetet n egyenlő területű mezőgazdasági területre. Most azt szeretnék elérni, hogy minden családhoz tartozzon egy vadászati és egy mezőgazdasági terület úgy, hogy a két területnek legyen közös része. Megoldható-e ez mindig?

11. Egy 100 csúcsú egyszerű, összefüggő gráf tetszőlegesen kiválasztott 3 pontja között fut legalább egy él. Bizonyítsuk be, hogy létezik a gráfban teljes párosítás.

12. Legyen a 100 csúcsú, egyszerű G gráfnak X egy 52 pontból álló független ponthalmaza és legyenek x, y és z különböző X-beli csúcsok. Tartalmazhat-e a $G+xy+yz+zx$ gráf teljes párosítást?