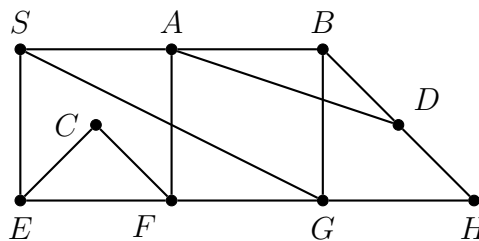


Szélességi bejárás, minimális összsúlyú feszítőfák

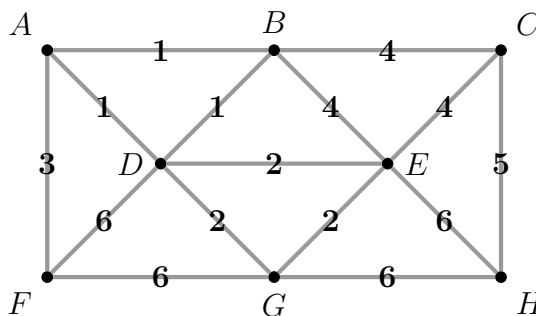
Bevezetés a számításelméletbe 2

12. gyakorlat

- Adott a G irányítatlan gráf a következő éllistával: **a**: b, c ; **b**: a, d ; **c**: a, d ; **d**: b, c, e, f ; **e**: d, f, g ; **f**: d, e, g, h ; **g**: e, f, h ; **h**: f, g . Keressünk G -ben a -ból kiinduló szélességi feszítőfát! Mennyi lesz a csúcsok a -tól való távolsága?
- (a) A BFS algoritmus az alábbi gráf csúcsait a következő sorrendben járta be: $S, \square, \square, \square, H, \square, F, C, \square$. Egészítsük ki a sorozatot a hiányzó csúcsok neveivel és adjuk meg a bejáráshoz tartozó BFS-fát.
- (b) Tartalmazhatja-e a $\{D, H\}$ éllet a gráf egy S -ből indított tetszőleges BFS bejárásához tartozó BFS-fája?

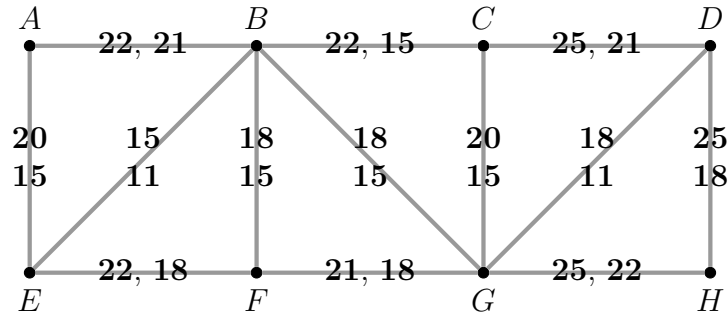


- Törpfallván kitört a járvány: ronda kórság fertőzött meg néhány törpöt. Szerencsére a betegségből minden törp egy nap alatt meggyógyul, és ezután egy napig immunissá válik, ám sajnos ezt követően újra fertőződhet. Kellemetlen, hogy a törpök még betegen sem adják fel azt a megrögzött szokásukat, hogy minden egyes nap minden barátjukat meglátogatják. Márpedig ha beteg és nem immunis törp találkozik, az utóbbi bizonyosan megfertőződik. Mutassuk meg, hogy ha Törpfallván 100 törp él, akkor a járványnak a kitörését követő 101. napon már bizonyosan vége van.
- Tegyük fel, hogy a G irányítatlan gráf tetszőleges szélességi kereséssel kapott feszítőfája csillag. Mit lehet mondani G -ről?
- (a) Határozzuk meg az alábbi gráf egy minimális összsúlyú feszítőfáját!
- (b) Hány különböző minimális összsúlyú feszítőfája van az ábrán látható gráfnak?

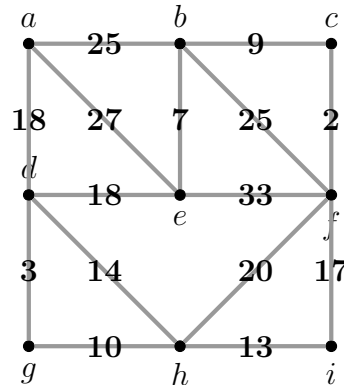


- Legyen G egy összefüggő gráf és $w : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$ súlyfüggvény G élein. Mutassuk meg, hogy G minden minimális összsúlyú feszítőfája megkapható a Kruskal-algoritmus egy lehetséges futásának eredményeként.

7. Az alábbi ábrán látható G gráf élei a felújítandó útszakaszokat jelentik. Minden élen két költség van: az olcsóbbik az egyszerű felújítás költsége, a drágább pedig ugyanez, kerékpárút építéssel. A cél az összes útszakasz felújítása úgy, hogy összefüggő kerékpárúthálózat épüljön ki, amelyen G minden pontja elérhető. Határozzunk meg egy lehető legolcsóbb felújítási tervet, ami teljesíti ezt a feltételt.



8. A bal oldali ábrán látható a G irányítatlan gráf és az élek költségei. Határozzuk meg, hogy ha az e és a h csúcsok közé behúzzunk egy új élet, akkor ezen élenk milyen (nemnegatív) költséget adhatunk ahhoz, hogy biztosan benne legyen a kapott gráfnak legalább egy minimális összsúlyú feszítőfájában.



9. Legyen G összefüggő gráf és $w : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$ súlyfüggvény G élein. Tegyük fel, hogy G -ben az e él egyik végpontja v és a v -re illeszkedő minden f élre $w(e) \leq w(f)$ teljesül. Mutassuk meg, hogy G -nek van olyan minimális összsúlyú feszítőfája, ami tartalmazza e -t.
10. Legyen G összefüggő gráf és $w : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$ súlyfüggvény G élein. Legyen továbbá C egy kör G -ben és e a C egy éle. Tegyük fel, hogy a C kör minden f élére $w(f) \leq w(e)$ teljesül. Mutassuk meg, hogy G -nek van olyan minimális összsúlyú feszítőfája, ami nem tartalmazza e -t.
11. Egy összefüggő G gráf egy F feszítőfáját nevezzük a gráf v csúcsára illeszkedőnek, ha G -nek van olyan, a v csúcsból indított BFS bejárása, amihez tartozó BFS-fa éppen F . Legföljebb hány éle lehet egy 100 csúcsú G összefüggő gráfnak, ha van olyan feszítőfája, ami G minden csúcsára illeszkedik?