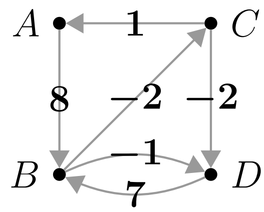
Legrövidebb utak keresése

Bevezetés a számításelméletbe 2
13. gyakorlat

1. Határozzuk meg az alábbi gráfban
   a) Ford algoritmusával az A csúcsból az összes többibe menő legrövidebb út hosszát!
   b) Floyd módszerével az összes pontpárra a legrövidebb út hosszát!



Változtassuk meg a $\overrightarrow{DB}$ él súlyát 7-ről 3-ra és futtassuk így is a fenti algoritmusokat.

2. Egy irányított gráf csúcshalmaza $\{a, b, c, d, e, f\}$, az élek és súlyaik pedig az alábbiak: $s(a, b) = 5$, $s(a, e) = 6$, $s(b, c) = 4$, $s(b, d) = 6$, $s(c, a) = 3$, $s(c, d) = 1$, $s(d, e) = 2$, $s(e, c) = 2$, $s(e, f) = 1$, $s(f, b) = 3$, $s(f, c) = 1$, $s(f, d) = 1$. Dijkstra módszerével határozzuk meg a-ból az összes többi csúcsba vezető legrövidebb út hosszát.

3. Adjuk meg az összes olyan minimális élszámú irányított gráfot (élsúlyokkal együtt), amelyekre az alábbi táblázat a Dijkstra-algoritmusban szereplő D tömb változásait mutathatja.

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
0	2	6	∞	∞	7
0	2	5	9	∞	6
0	2	5	6	9	6
0	2	5	6	8	6
0	2	5	6	7	6

4. Legyen $G = (V, E)$ mátrixszal adott n pontú, súlyozott élű irányított gráf. Tegyük fel, hogy G nem tartalmaz negatív összhosszúságú irányított kört, továbbá azt, hogy a G-beli egyszerű irányított utak legfeljebb 25 élből állnak. Javasoljunk n^2-tel arányos költségű módszert az $1 \in V$ pontból az összes további $v \in V$ pontokba vivő legrövidebb utak hosszának meghatározására.

5. A mátrixával adott G irányított gráf élei között van egy negatív súlyú él, a többi él súlya pozitív. A gráfban nincs negatív súlyú kör. Adjunk n^2-tel arányos lépésszámú algoritmust az $s \in V(G)$ pontból az összes többi pontba vezető legrövidebb utak meghatározására.

6. Adjunk n^4-nel arányos futásidejű algoritmust, amely egy mátrix segítségével adott n pontú irányítatlan, nemnegatív élsúlyokkal ellátott gráfban megtalálja a legrövidebb összhosszúságú kört (ami egy ponton nem mehet át kétszer).

   Adjunk hatékonyabb algoritmust adni irányított gráf esetén, feltéve, hogy semelyik két csúcs között sincsenek „oda-vissza" irányított élek.

7. Adott egy $n \times k$ méretű táblázat, amiben minden mezőben egy 0 vagy egy 1 áll. Találjunk a táblázat bal felső sarkától a jobb alsó sarokig egy mezőhatárok mentén jobbra és lefelé haladó olyan vonalat, amire az igaz, hogy a vonal alatti 1-esek és a vonal feletti 0-k számának összege a lehető legkisebb. Hogyan érdemes eljárni?

8. Forintot szeretnénk különféle valutákra átváltani. Külföldön élő ismerőseink révén nem csak forintot, hanem számos más valutát is közvetlenül át tudunk váltani bizonyos valutákra. A cél, hogy esetleg ilyen átváltások felhasználásával minél jobb árfolyamot érjünk el a forintunk konverziója során. E célból elkészítettünk egy irányított gráfot, aminek a csúcsai az egyes valutáknak, az élek pedig az egyes közvetlen tranzakcióknak felelnek meg. Minden uv élhez ismert az adott váltásnál alkalmazott árfolyam, azaz, hogy hány egységet kell fizetnünk az u pénznemben a v pénznem egy egységéért. Adjunk hatékony módszert arra, hogy meghatározzuk, legfeljebb mennyit kaphatunk az egyes valutákból 1 Ft-ért, ill. határozzuk meg azt is, milyen átváltásokat kell ehhez végeznünk.