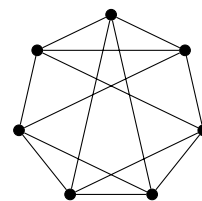
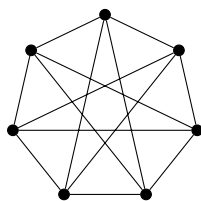
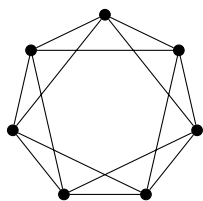


Gráfelméleti alapfogalmak

Bevezetés a számításelméletbe 2

2. gyakorlat

1. Az előre megszámozott (címkézett) n darab pont közé hányféleképp húzhatunk be éleket úgy, hogy egyszerű gráfhoz jussunk?
2. Legyenek a G egyszerű gráf csúcsai az $1, 2, \dots, 10$ számok, és két különböző csúcs között akkor fusson él, ha a két szám különbsége páratlan. Hány 4 hosszú köre van a G gráfnak?
3. Hány feszítőfája van a $K_{2,n}$ teljes páros gráfnak (a gráf csúcsai $a_1, a_2, b_1, b_2, \dots, b_n$, és tetszőleges $i \in \{1, 2\}$ és $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén az a_i és a b_j csúcs között vezet él)?
4. Van olyan G gráf, melyben minden csúcs foka különböző? És ha a gráf egyszerű?
5. Döntsük el, van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a pontok foka rendre $1, 2, 2, 3, 3, 3$ ill. $1, 1, 2, 2, 3, 4, 4$ ill. $2, 3, 3, 4, 5, 6, 7$ ill. $1, 3, 3, 4, 5, 6, 6$.
6. Mi lehet a G gráf, ha $\Delta(G) \leq 2$? ($\Delta(G)$ a G gráf maximális fokszámát jelöli.)
7. Melyek izomorfak az alábbi gráfok közül?



8. Mutassunk a komplementerével izomorf 5-, ill. 6-pontú gráfot!
9. Hány pontja van annak a T fának, melyre $|E(\overline{T})| = 15 \cdot |E(T)|$?
10. Egy fában csak két különböző fokszám fordul elő: az egyik fajta 9-szer, a másik 92-szer. Mi a szóban forgó két fokszám?
11. Tegyük fel, hogy az F fának csak első- és negyedfokú csúcsai vannak, szám szerint n_1 ill. n_4 . Igazoljuk, hogy $n_1 = 2 \cdot n_4 + 2$.

12. Bizonyítsuk be, hogy ha egy fába behúzunk egy élet, akkor pontosan egy kör keletkezik.
13. Egy 100 csúcsú összefüggő, egyszerű gráfnak 102 éle van. Mutassuk meg, hogy ekkor van a gráfban 3 páronként különböző kör. (Két kör akkor különböző, ha nem pontosan ugyanazon élek alkotják.)
14. Egy n csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább $n/2$. Következik-e ebből, hogy a gráf összefüggő?
15. Egy 100 csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább 33. Mutassuk meg, hogy a gráfhoz hozzá lehet venni egyetlen új élet úgy, hogy a kapott gráf összefüggő legyen.
16. Egy 23 csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább 7. Mutassuk meg, hogy bárhogy választunk ki a gráf csúcsai közül hármat, lesz köztük két olyan, melyek között van a gráfban út.
17. A 20 csúcsú G egyszerű gráfban 10 csúcs foka legfeljebb 7, a maradék 10 csúcs foka pedig legalább 16. Hány éle van G -nek?
18. Egy 100 csúcsú összefüggő, egyszerű gráfnak 100 éle van. Mutassuk meg, hogy ekkor van a gráfban 3 páronként különböző feszítőfa. (Két feszítőfa akkor különböző, ha nem pontosan ugyanazon élek alkotják.)
19. Határozzuk meg az összes olyan (legalább két csúcsú) fát, amely izomorf a saját komplementerével. (Az egymással izomorf megoldásokat tekintsük azonosnak.)
- 20.* Adjunk meg egy olyan legalább két csúcsú fát, amelynek egyetlen önmagára vonatkozó izomorfizmusa van, az, amely minden csúcshoz önmagát rendeli. (Értelmezési segítség: a két ponton megadható egyetlen fa például nem ilyen, mert két csúcsát felcserélve önmagába megy át.)