

Színezés
Bevezetés a számításelméletbe 2
5. gyakorlat

Kromatikus szám

A G egyszerű gráf csúcsainak egy színezésén színeknek a csúcsokhoz való olyan hozzárendelését értjük, melyben szomszédos csúcsok különböző színt kapnak.

A G egyszerű gráf kromatikus száma $\chi(G) = k$, ha G k színnel kiszínezhető, de $k - 1$ színnel nem.

Klikk

A G gráf egy teljes részgráfját klikknek nevezzük. A G -ben található maximális méretű klikk méretét $\omega(G)$ -vel jelöljük és a gráf klikkszámának nevezzük.

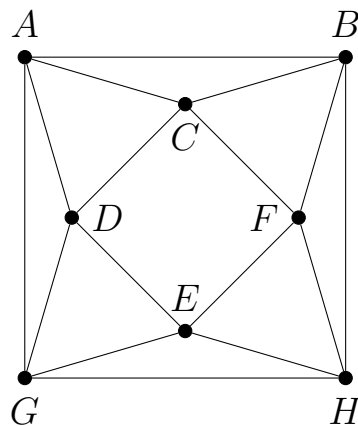
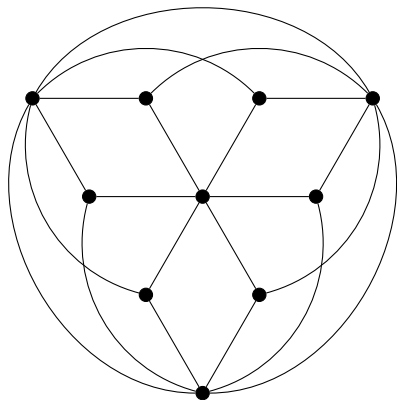
Állítás

Minden G gráfra $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ teljesül.

Tétel (Mycielski)

Minden $k \geq 2$ egész számra van olyan G_k gráf, hogy $\omega(G_k) = 2$ és $\chi(G_k) = k$.

1. Határozzuk meg az alábbi gráfok kromatikus számát.



2. Egy egyszerű gráfban pontosan egy páratlan kör van. Határozzuk meg a gráf kromatikus számát.
3. Egy 10 csúcsú egyszerű gráfban van egy 5, egy 4 és egy 3 fokú csúcs, minden más csúcs foka 2. Mutassuk meg, hogy a gráf színezhető 3 színnel.
4. Egy 8 csúcsú teljes gráfból töröljük egy 6 csúcsú kör éleit. Határozzuk meg a kapott gráf kromatikus számát.
5. Egy gráf csúcsai az 1 és 100 közti egész számok, két különböző számot összekötünk, ha van egynél nagyobb közös osztójuk. Határozzuk meg a gráf kromatikus számát.

6. Készítsük el a G gráfot egy 7 hosszú körből úgy, hogy hozzáadunk a körhöz $\binom{7}{3}$ új csúcsot, és az új csúcsok mindegyikét a kör három pontjával kötjük össze úgy, hogy semelyik két új csúcsnak se ugyanazok a körbeli csúcsok legyenek a szomszédai. Határozzuk meg a G gráf $\chi(G)$ kromatikus számát.
7. Tegyük fel, hogy a G gráf 4-színezhető és véges. Igazoljuk, hogy kiválasztható G éleinek legfeljebb hatodrésze úgy, hogy a kiválasztott élek G -ből való törlésével kapott G' gráf 3-színezhető legyen.
8. Legyen G olyan 7 csúcsú egyszerű gráf, melyre G -ben és a komplementerében is van Hamilton-kör. Mutassuk meg, hogy ekkor G kromatikus száma 3 vagy 4.
9. Egy szabályos tíszögnek behúzzuk az összes legrövidebb átlóját. Határozzuk meg a kapott (10 csúcsú, 20 élű) gráf klikkszámát és kromatikus számát.
10. Egy G gráf csúcsai legyenek a 100-nál nemnagyobb pozitív egészek. Két különböző csúcs pontosan akkor szomszédos G -ben, ha a megfelelő egészek különbségének abszolútértéke legalább 3 és legfeljebb 9. Határozzuk meg G kromatikus számát.
11. Egy sakktáblán 7 huszár áll úgy, hogy mindegyik legalább két másikat tud ütni. Mutassuk meg, hogy biztosan van közöttük olyan, amelyik három másikat is tud ütni.
12. Legyen $k \geq 3$ és jelölje G_k azt a Mycielski-konstrukció által készített gráfot, amelyre $\chi(G_k) = k$ és legyen G_k csúcsainak száma n . Mutassuk meg, hogy $\chi(\overline{G_k}) \geq \frac{n+1}{2}$.
13. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges e élű egyszerű gráf élei közül elhagyható legfeljebb $e/2$ úgy, hogy a maradék gráf páros legyen.