

# Párosítások

## Bevezetés a számításelméletbe 2

### 7. gyakorlat

#### Frobenius-tétel

Egy  $G = (A, B, E)$  páros gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha  $|A| = |B|$  és minden  $X \subseteq A$  részhalmazra  $|X| \leq |N(X)|$  teljesül.

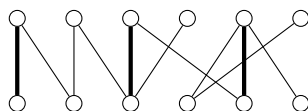
#### Hall-tétel

Egy  $G = (A, B, E)$  páros gráfban akkor és csak akkor van  $A$ -t lefedő párosítás, ha minden  $X \subseteq A$  részhalmazra  $|X| \leq |N(X)|$  teljesül.

#### Tutte-tétel

Egy  $G$  gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha tetszőleges  $X \subset V$  esetén  $c_p(G - X) \leq |X|$ , ahol  $c_p(G - X)$  a  $G - X$  gráf páratlan méretű komponenseinek a száma.

1. Az ábrán látható  $G$  gráfban keressünk maximális párosítást a javító utas algoritmussal a vastag vonalakkal jelölt párosításból kiindulva, valamint adjunk meg egy minimális lefogó ponthalmazt is.

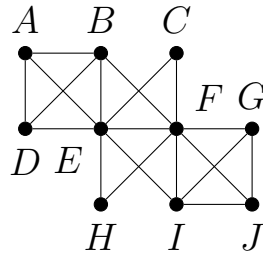


2. Egy  $G(A, B; E)$  páros gráf két pontosztálya legyen  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_9\}$  és  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_9\}$ . Minden  $1 \leq i \leq 9$  és  $1 \leq j \leq 9$  esetén  $a_i$  akkor legyen szomszédos  $b_j$ -vel, ha az alábbi mátrix  $i$ -edik sorának és  $j$ -edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg  $G$ -ben egy maximális párosítást és egy minimális lefogó csúcshalmazt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Tegyük fel, hogy a 88 pontú  $G$  páros gráfban  $\alpha(G) = 44$ . Igazoljuk, hogy  $G$ -re teljesül a Hall-feltétel, azaz  $|X| \leq |N(X)|$  az  $A$  színosztály minden  $X$  részhalmaza esetén.

4. Használjuk Tutte tételét annak igazolására, hogy az alábbi gráfban nincs teljes párosítás.



5. Egy 100 csúcsú egyszerű, összefüggő gráf tetszőlegesen kiválasztott 3 pontja között fut legalább egy él. Bizonyítsuk be, hogy létezik a gráfban teljes párosítás. Igaz-e az állítás 3 helyett 4 pont esetén?
6. Egy kiránduláson a résztvevő  $n$  házaspár között akarunk szétosztani  $2n$  különböző csokoládét úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy mindenki legalább  $n$  fajtát szeret a csokoládék közül, és hogy minden csokoládét minden házaspárnak legalább az egyik tagja szereti. Bizonyítsuk be, hogy a csokoládék kioszthatók úgy, hogy mindenki olyat kapjon, amelyet szeret.
7.  $G$  egy páros gráf,  $A$  és  $B$  osztályokkal, és minden  $X \subseteq A$  halmazra  $|N(X)| \geq |X| - 1$ . Bizonyítsuk be, hogy  $G$  tartalmaz olyan párosítást, ami  $A$ -t egy pont kivételével lefedi.
8.  $G$  egy páros gráf,  $A$  és  $B$  színosztályokkal.  $A$ -ban minden pont foka 40,  $B$ -ben 30.
- Bizonyítsuk be, hogy  $G$  tartalmaz  $A$ -t fedő párosítást.
  - Bizonyítsuk be, hogy  $G$  tartalmaz 10 éldiszjunkt  $A$ -t fedő párosítást.
9. Egy 10 csúcsú páros gráfban minden csúcs foka 3 vagy 4. Mutassuk meg, hogy a gráfban van teljes párosítás.
10. Valaki találomra szétosztott egy pakli francia kártyát 13 darab 4 lapból álló csomagba. Bizonyítsuk be, hogy ekkor mindegyik csomagból kiválasztható egy lap úgy, hogy a kiválasztott lapok között mindegyik fajta figurából éppen egy legyen (vagyis egy 2-es, egy 3-as, ..., egy ász).
11. Egy szigeten  $n$  család lakik. A sziget elöljárói felosztották az egész szigetet  $n$  egyenlő területű vadászati körzetre és ezzel egyidejűleg (az előbbtől függetlenül, ezért egészen más módon) felosztották az egész szigetet  $n$  egyenlő területű mezőgazdasági területre. Most azt szeretnék elérni, hogy minden családhoz tartozzon egy vadászati és egy mezőgazdasági terület úgy, hogy a két területnek legyen közös része. Megoldható-e ez mindig?
12. Legyen a 100 csúcsú, egyszerű  $G$  gráfnak  $X$  egy 52 pontból álló független ponthalmaza és legyenek  $x$ ,  $y$  és  $z$  különböző  $X$ -beli csúcsok. Tartalmazhat-e a  $G + xy + yz + zx$  gráf teljes párosítást?