Leszámlálási feladatok

Bevezetés a számításelméletbe 2
2020.
1. gyakorlat

Ismétlés nélküli permutáció. Adott n db különböző elem összes lehetséges sorrendje

$$n! := \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 0, \\ n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1, & \text{ha } n > 0. \end{cases}$$

Ismétléses permutáció. Adott n db elem között az azonosak száma $k_1, k_2, \ldots, k_l$ (tehát $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_l$); ezek összes lehetséges sorrendje

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_l!}.$$

Ismétlés nélküli variáció. Adott n db különböző elem közül k db-ot kiválasztva és sorba rendezve az n db elem k-ad rendű ismétlés nélküli variációit kapjuk. Ezek száma

$$V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Ismétléses variáció. Ha adott n db különböző elem közül választhatunk k helyre úgy, hogy megengedünk ismétlődő elemeket is, akkor a kapott eseteket az n db elem k-ad rendű ismétléses variációinak nevezzük. Ezek száma

$$V_{\text{ism}}(n,k) = n^k.$$

Ismétlés nélküli kombináció. Ha adott n db különböző elem közül kiválasztunk k db-ot úgy, hogy a sorrendre nem vagyunk tekintettel, akkor a kiválasztásokat az n db elem k-ad rendű ismétlés nélküli kombinációinak nevezzük. Ezek száma

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Ismétléses kombináció. Ha n db különböző elemből kiválasztunk k db-ot úgy, hogy egy elem többször is választható és a sorrendre nem vagyunk tekintettel, akkor a kiválasztásokat az n db elem k-ad rendű ismétléses kombinációinak nevezzük. Ezek száma

$$C_{\text{ism}}(n,k) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Binomiális tétel Tetszőleges $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

1. Egy fagyizóban 26 féle fagyit árulnak: **A**nanász, **B**anán, **C**itrom, ..., **Z**öldalma. Hányféleképpen adhat a kiszolgáló fagyit egy vendégnek, ha az alábbi kérései vannak (de minden mást a kiszolgálóra bíz)?

   (a) 5 gombócot kér tölcsérbe; azt az egyet köti ki, hogy ne 5 ugyanolyan gombócot kapjon.

   (b) Egy gombóc **A**-t, két-két gombóc **B**-t és **C**-t és négy gombóc **D**-t kér, mindezt egyetlen tölcsérbe.

   (c) 5 tetszőleges gombócot kér tölcsérbe, de legyen közte (legalább egy) **L**icsi.

   (d) 5 különböző gombócot kér tölcsérbe, de ne legyen közte **F**ahéj.

   (e) 5 tetszőleges gombócot kér tányérra, de ne legyen közte **F**ahéj.

   (f) 5 különböző gombócot kér tányérra, de legyen közte **K**örte vagy **P**isztácia (vagy mindkettő).

   (g) 35 gombócot kér tányérra úgy, hogy minden íz szerepeljen, de semelyik se szerepeljen kettőnél többször.

2. Az összes lehetséges módon kitöltött lottószelvények között hány egy-, két-, három-, négytalálatos szelvény van?

3. 10 házaspár elment tangózni. Hányféleképpen alkothattak 10 táncospárt, ha mindenki ellenkező neművel táncolt és a 10 táncospár közül pontosan 7 tagjai alkottak egyben házaspárt is?

4. (a) Hányféle olyan ötjegyű szám van, melynek számjegyei szigorú monoton csökkenőek?
   (b) Hányféle olyan ötjegyű szám van, melynek számjegyei szigorú monoton növekvőek?
   (c) Hányféle olyan ötjegyű szám van, melynek számjegyei monoton csökkenőek?
   (d) Hányféle olyan ötjegyű szám van, melynek számjegyei monoton növekvőek?

5. Bizonyítsuk be, hogy
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

6. Adjuk meg az alábbi kifejezés értékét (két tizedesjegy pontossággal).
$$\log_2 \left[\binom{101}{0} + \binom{101}{1} + \binom{101}{2} + \ldots + \binom{101}{50} \right]$$

7. Bizonyítsuk be, hogy nemüres halmaznak ugyanannyi páros elemszámú részhalmaza van, mint ahány páratlan!

8. Bizonyítsuk be a következőket.
$$\binom{k}{k}\binom{n-k}{0} + \binom{k}{k-1}\binom{n-k}{1} + \ldots + \binom{k}{0}\binom{n-k}{k} = \binom{n}{k}$$
$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$
$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n} = 2^{n-1}n$$

9. Hány bástyát lehet elhelyezni úgy a sakktáblán, hogy egyik se üsse a másikat? Hányféleképpen helyezhető el ez a maximális számú bástya a sakktáblán úgy, hogy ne álljanak ütésben? (* Mik a válaszok futókra?)

10. Hányféleképpen állhat fel fotózáshoz két egymás mögötti sorba 20 különböző magasságú ember úgy, hogy minden hátsó sorban álló magasabb legyen annál, aki az első sorban közvetlenül előtte áll?

11. Hány olyan Neptun-kód készíthető, amely pontosan három betűt és három számjegyet tartalmaz és a kódban szereplő betűk mind különbözők?

12. Egyszerre dobunk 5 egyforma dobókockával. Hányféle lehet az eredmény?

13. Hányféleképp választhatók meg az $x_1, \ldots, x_{100}$ nemnegatív egészek úgy, hogy $x_1 + \ldots + x_{100} = 2019$ teljesüljön? Hogyan változik az eredmény, ha „nemnegatív” helyett „pozitívat” mondunk?