

# Többszörös összefüggőség, Menger tételei

Bevezetés a számításelméletbe 2

2020.

12. gyakorlat

## Irányított/irányítatlan $st$ -utakat lefogó élhalmaz (ponthalmaz).

Legyen  $G$  egy irányított/irányítatlan gráf és  $s, t \in V(G)$  két különböző csúcs. Azt mondjuk, hogy egy  $Z \subseteq E(G)$  élhalmaz (egy  $Y \subseteq V(G)$  ponthalmaz) lefogja az összes  $s$ -ből  $t$ -be vezető irányított/irányítatlan utat, ha a  $Z$ -beli éleket (az  $Y$ -beli csúcsokat) elhagyva az  $s$  és  $t$  csúcsok különböző komponensekbe kerülnek.

## Menger tételei.

- Ha  $G$  egy irányított/irányítatlan gráf,  $s, t \in V(G)$  két tetszőleges csúcs, akkor a páronként élidegen irányított/irányítatlan  $st$ -utak maximális száma megegyezik az összes irányított/irányítatlan  $st$ -utat lefogó élek minimális számával.
- Ha  $G$  egy irányított/irányítatlan gráf,  $s, t \in V(G)$  két nemszomszédos csúcs, akkor a páronként pontidegen irányított/irányítatlan  $st$ -utak maximális száma megegyezik az összes irányított/irányítatlan  $st$ -utat lefogó pontok minimális számával.

## Többszörös pontösszefüggőség.

Egy  $G$  gráfot  $k$ -szorosán pontösszefüggőnek nevezünk, ha legalább  $k + 1$  pontja van, és akárhogy hagyunk el belőle  $k$ -nál kevesebb pontot, a maradék gráf összefüggő marad.

A legnagyobb olyan  $k$  egész számot, amelyre még a  $G$  gráf  $k$ -szorosán összefüggő,  $\kappa(G)$ -vel jelöljük.

## Többszörös élösszefüggőség.

Egy  $G$  gráfot  $k$ -szorosán élösszefüggőnek nevezünk, ha akárhogy hagyunk el belőle  $k$ -nál kevesebb éleket, a maradék gráf összefüggő marad.

A legnagyobb olyan  $k$  egész számot, amelyre még a  $G$  gráf  $k$ -szorosán élösszefüggő,  $\lambda(G)$ -vel jelöljük.

## Menger tétele többszörös élösszefüggőségre.

A  $G$  gráf akkor és csak akkor  $k$ -szorosán élösszefüggő, ha bármely két pontja között létezik  $k$  élidegen út.

## Menger tétele többszörös pontösszefüggőségre.

A  $G$  gráf akkor és csak akkor  $k$ -szorosán pontösszefüggő, ha legalább  $k + 1$  pontja van, és bármely két pontja között létezik  $k$  pontidegen út.

## Megfigyelés.

Tetszőleges  $G$  gráf esetén  $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ , ahol  $\delta(G)$  a gráf minimális fokszámát jelöli.

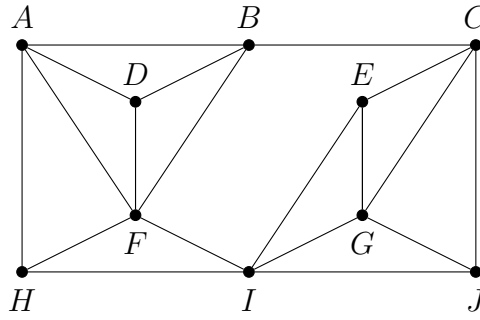
1. Maximálisan hány páronként él-, illetve pontdiszjunkt út adható meg az alábbi pontpárok között az alábbi gráfban?

(a)  $B$  és  $I$ ;

(b)  $A$  és  $J$ ;

(c)  $B$  és  $C$ .

Határozzuk meg a gráf pont-, illetve élösszefüggőségi számát.



2. Hányszorosan összefüggő/élösszefüggő

- (a) egy fa;
- (b) egy kör;
- (c) egy teljes gráf;
- (d) egy teljes páros gráf?

3. A 15 pontú  $G$  gráf egy 4 pontú, egy 5 pontú és egy 6 pontú körből készült úgy, hogy az 5 pontú kör minden csúcsát összeköttöttük (egyetlen éllel) a másik két kör minden csúcsával. Legyen  $s$  a 4 pontú kör egyik csúcsa,  $t$  pedig a 6 pontú kör egyik csúcsa.

- (a) Maximálisan hány páronként pontdiszjunkt út adható meg  $s$  és  $t$  között  $G$ -ben?
- (b) Maximálisan hány páronként éldiszjunkt út adható meg  $s$  és  $t$  között  $G$ -ben?

4. Húzzunk be 3 élet két diszjunkt 5 csúcsú teljes gráf csúcsai közé úgy, hogy a kapott  $G$  gráf egyszerű legyen. Igaz-e, hogy  $G$  minden esetben

- (a) háromszorosan összefüggő;
- (b) háromszorosan élösszefüggő?

5. Tegyük fel, hogy a  $G$  gráfban a rögzített  $x$  és  $y$  pontokat összekötő pontidegen utak maximális száma 5. Lehet-e az  $x$  és  $y$  pontokat összekötő utakat lefogó élek minimális száma 1, 2, 3, 4, 5, 6 vagy 7?

6. Mutassuk meg, hogy egy háromszorosan összefüggő gráfban mindig létezik páros hosszúságú kör.

7. A  $G$  egyszerű,  $n$  csúcsú gráfban bármely két, nemszomszédos csúcsra teljesül, hogy a fokszámaik összege legalább  $n + k - 2$  (ahol  $n > k \geq 1$  egész). Bizonyítsuk be, hogy  $G$   $k$ -szorosan összefüggő.

8. Bizonyítsuk be, hogy ha a  $G$  irányított gráfban van  $u$ -ból  $v$ -be is és  $v$ -ből  $w$ -be is  $k$  éldiszjunkt irányított út, akkor  $G$ -ben létezik  $u$ -ból  $w$ -be is  $k$  éldiszjunkt irányított út.

9. Legyen  $G$  egy hurokélmentes, irányítatlan gráf és  $s \in V(G)$  egy rögzített csúcs. Jelölje minden  $v \in V(G)$ ,  $v \neq s$  esetén  $\lambda(v)$  az  $s$ -ből a  $v$ -be vezető, páronként éldiszjunkt utak maximális számát. Tegyük fel, hogy valamely  $t \in V(G)$  csúcsra  $\lambda(t) = 10$ , de minden  $v \in V(G)$ ,  $v \neq s, t$  esetén  $\lambda(v) > 10$ . Mutassuk meg, hogy ekkor  $t$  foka 10.

10. Egy 10 csúcsú egyszerű gráfnak 40 éle van. Határozzuk meg a legnagyobb olyan  $k$  számot, melyre a gráf biztosan  $k$ -szorosan pontösszefüggő.

11. Legyen  $G$  egy  $k$ -szorosan összefüggő gráf és  $A$  és  $B$  a  $G$  csúcsainak  $k$  elemű, diszjunkt részhalmazai. Bizonyítsuk be, hogy létezik  $G$ -ben  $k$  darab páronként (teljes egészében, nem csak belsőleg) pontdiszjunkt út úgy, hogy mindegyik  $A$  és  $B$ -beli pontokat köt össze.