Gyakorlás

Bevezetés a számításelméletbe 2
2020.
9. gyakorlat

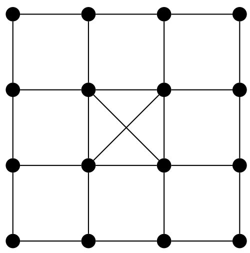
1. Kukutyinban a rendszámok hat karakterből állnak, minden karakter az angol ábécé 26 betűjének valamelyike vagy egy 0 és 9 közti számjegy. Három karakternek betűnek, háromnak pedig számnak kell lennie, ezen kívül az egyetlen kikötés, hogy ha három betű áll egymás mellett, akkor azok nem lehetnek egyformák (jó rendszám például 37AAG1, de nem jó ABCD85 és 35HHH2). Hányféle rendszám adható meg Kukutyinban?

II/11. Határozzuk meg az összes olyan (legalább két csúcsú) fát, amely izomorf a saját komplementerével. (Az egymással izomorf megoldásokat tekintsük azonosnak.)

2. Legyen az összefüggő G gráf csúcshalmaza $\{S, A, B, C, D, E, F\}$. A BFS algoritmus két különböző futása a csúcsokat az S,A,B,C,D,E,F, illetve az S,B,C,A,F,E,D sorrendben járja be. Határozzuk meg a csúcsok S-től vett távolságát, ha tudjuk, hogy S foka kisebb, mint 6.

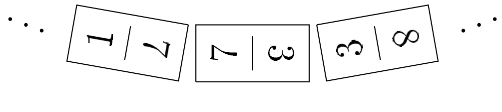
3. Egy 100 csúcsú G összefüggő gráf éleit az 1 és 2 súlyokkal súlyoztuk úgy, hogy az 1 súlyú élek részgráfja (vagyis az a gráf, melynek csúcsai azonosak G csúcsaival, de csak G 1 súlyú éleit tartalmazza) 7 komponensből áll. Határozzuk meg G egy minimális összsúlyú feszítőfájának súlyát.

4. Síkbarajzolható-e az alábbi gráf?



V/5. Egy 59 csúcsú egyszerű gráfban bármely két csúcs fokszámösszege 60-nál nagyobb páros szám. Igaz-e, hogy a gráfban biztosan van Euler-körséta?

V/16. Egy dominókészlet minden dominójának két felén két különböző, 1 és n közötti egész szám áll (ahol $n > 1$ egész). Tudjuk, hogy bárhogyan választunk két különböző 1 és n közötti egészt, pontosan egy olyan dominó van a készletben, aminek két felén épp a két kiválasztott szám áll. A feladatunk az, hogy a készlet összes dominóját elhelyezzük egyetlen körben úgy, hogy az egymás mellé kerülő dominófeleken azonos szám álljon (lásd az ábrát). Határozzuk meg, hogy mely n-ek esetén létezik ilyen elhelyezés.



VI/7. Egy szabályos tízszögnek behúzzuk az összes legrövidebb átlóját. Határozzuk meg a kapott (10 csúcsú, 20 élű) gráf klikkszámát és kromatikus számát.

VII/5. Egy adott intervallumrendszerhez tartozó intervallumgráf kromatikus száma 10. Mutassuk meg, hogy ha az intervallumrendszerből törlünk néhány olyan intervallumot, melyek közt semelyik háromnak nincs közös pontja, akkor a visszamaradó intervallumrendszerhez tartozó intervallumgráf kromatikus száma legalább 8.

5. A $G(A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_8\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_8\}$. Minden $1 \leq i \leq 8$ és $1 \leq j \leq 8$ esetén az a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha az alábbi mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Határozzuk meg $\tau(G)$ és $\rho(G)$ értékét, és adjunk meg G-ben egy minimális lefogó ponthalmazt és egy minimális lefogó élhalmazt.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

VIII/7. Egy 100 csúcsú egyszerű, összefüggő gráf tetszőlegesen kiválasztott 3 pontja között fut legalább egy él. Bizonyítsuk be, hogy létezik a gráfban teljes párosítás. Igaz-e az állítás 3 helyett 4 pont esetén?

VIII/11. Egy 10 csúcsú páros gráfban minden csúcs foka 3 vagy 4. Mutassuk meg, hogy a gráfban van teljes párosítás.

6. A VIK-es gólyabálon 10 lány és 158 fiú vesz részt. A szervezők ennek megfelelően 10 (fiú-lány) párt szeretnének összeállítani a nyitótánchoz. Természetesen mindenki csak olyan partnerrel hajlandó táncolni, aki szimpatikus neki. A lányokról tudjuk, hogy mindegyiküknek legalább 9 fiú szimpatikus, a fiúkról csak annyit tudunk, hogy az egyiküknek pontosan 6 lány szimpatikus (a szimpátia minden esetben kölcsönös). Biztosan össze tudják-e állítani a szervezők a 10 párt?