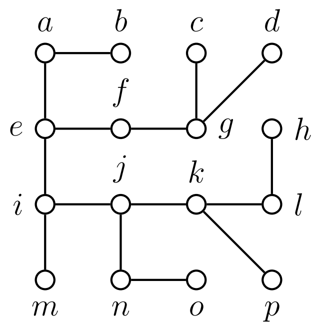
Konzultáció

Bevezetés a számításelméletbe 2
2020.

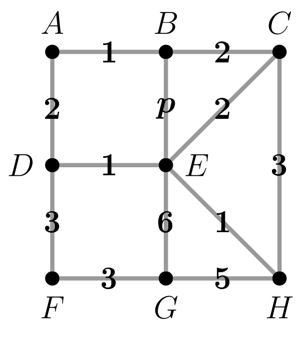
1. Egy BME hallgató Neptun-kódja egy olyan, 6 karakterből álló sorozat, amelynek minden tagja az angol ábécé 26 betűjének egyike, vagy a $0, 1, \ldots, 9$ számjegyek valamelyike. Hány olyan Neptun-kód létezik, amelyben pontosan két, különböző számjegy szerepel, és van (legalább) két egyforma betű egymás mellett? (A végeredmény számszerű értékét nem kell megadni, azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, amely csak a négy alapműveletet ismeri.)

2. Egy 99 csúcsú egyszerű gráfban két csúcs foka 3, a többi csúcs foka 4. Mutassuk meg, hogy a gráfnak van páratlan köre.

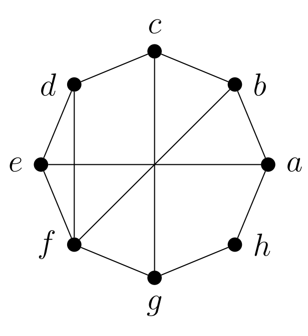
3. A bal oldali ábrán látható az egyszerű, irányítatlan G gráf i gyökerből indított szélességi, mélységi bejárása után kapott F feszítőfa. Tudjuk, hogy az e csúcs G-beli fokszáma 7. Határozzuk meg a G gráf e-ből induló éleit.



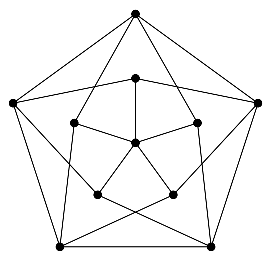
4. A p pozitív valós paraméter minden értékére határozzunk meg egy minimális összsúlyú feszítőfát az alábbi gráfban.



5. Döntsük el, hogy az alábbi gráf síkbarajzolható-e.



6. Legalább hány élet kell elhagyni a $K_{3,4}$ teljes páros gráfból ahhoz, hogy síkbarajzolható gráfot kapjunk?
7. Egy 12 csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka 4. Mutassuk meg, hogy a gráfhoz hozzá lehet venni pontosan 10 élet úgy, hogy a kapott gráf egyszerű maradjon és legyen Euler-körsétája.
8. Egy 20 csúcsú egyszerű páros gráfban minden csúcs foka legalább 9. Mutassuk meg, hogy ebből nem következik, hogy a gráfnak van Hamilton-útja.
9. Az $n \geq 3$ pontú K_n teljes gráfból töröltük egy feszítőfájának éleit, majd a feszítőfa élei közül visszaraktunk kettőt. Mutassuk meg, hogy az így nyert G gráf tartalmaz Hamilton-kört!
10. Egy gráf csúcsai legyenek az $1, 2, \ldots, 100$ számok; két különböző csúcsot kössünk összem ha a megfelelő számoknak közös osztója a 2, a 3 és az 5 közül legalább az egyik. Határozzuk meg a gráf kromatikus számát.
11. Határozzuk meg az alábbi G gráfban a $\tau(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$ és $\alpha(G)$ értékeket!



12. Egy $G(A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_9\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_9\}$. Minden $1 \leq i \leq 9$ és $1 \leq j \leq 9$ esetén a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha az alábbi mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg G-ben egy maximális párosítást és egy minimális lefogó csúcshalmazt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

13. A G gráfról annyit tudunk, hogy a $K_{9,9}$ teljes páros gráfból kaptuk 8 él törlésével. Határozzuk meg G élkromatikus számát.
14. (a) Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot és egy minimális vágást $p = 10$ esetén.
    (b) Határozzuk meg az ef él p kapacitásának összes olyan értékét, amire a maximális st-folyam-nagyság pontosan 42.