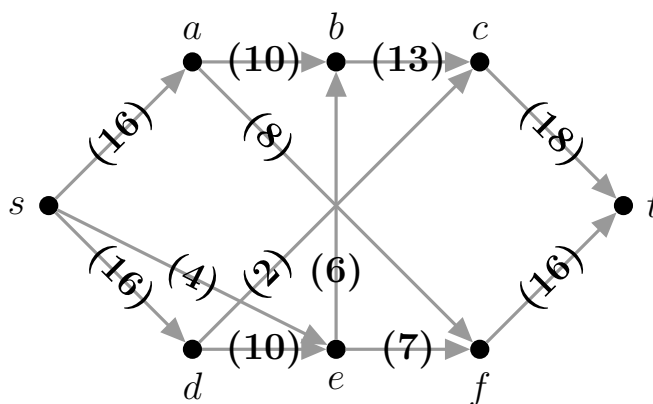


Folyamok  
 Bevezetés a számításelméletbe 2  
 2021.  
 10. gyakorlat

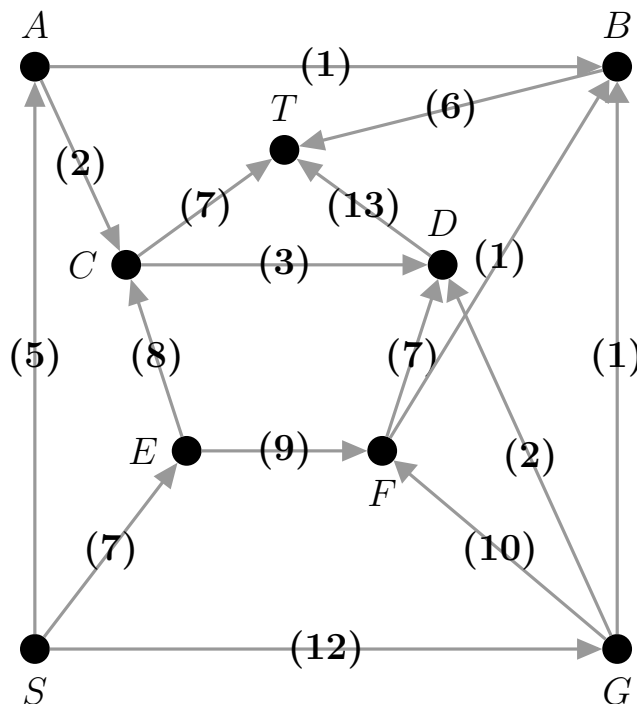
**Egészértékűségi (EgÉr) lemma**

Ha egy hálózatban minden él kapacitása egész, akkor létezik olyan maximális folyam, amely minden élen egész értéket vesz fel.

1. (a) Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot ( $s$ -ből  $t$ -be).
- (b) Határozzuk meg az  $\{s, a, b\}$  csúcshalmaz által meghatározott vágás kapacitását.
- (c) Határozzuk meg az  $\{s, a, e\}$  csúcshalmaz által meghatározott vágás kapacitását.
- (d) Adjunk meg egy minimális  $st$ -vágást.



2. (a) Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot ( $S$ -ből  $T$ -be).
- (b) Határozzuk meg az  $\{S, A, B, C\}$  csúcshalmaz által meghatározott vágás kapacitását.
- (c) Adjunk meg egy minimális vágást.



3. Egy hálózatban minden él kapacitása hárommal osztható egész szám. Döntsük el (és indokoljuk is meg), hogy az alábbi állítások közül melyek azok, amelyek mindig teljesülnek.
- (a) Minden vágás kapacitása osztható hárommal.
  - (b) Minden folyam értéke osztható hárommal.
  - (c) Minden maximális folyam értéke osztható hárommal.
  - (d) Minden maximális folyam minden élén a folyamérték osztható hárommal.
4. Egy hálózatban minden él kapacitása 2.
- (a) Igaz-e mindig, hogy a maximális folyamérték páros egész?
  - (b) Igaz-e mindig, hogy létezik olyan maximális folyam, mely minden élen 0 vagy 2 értéket vesz fel?
  - (c) Igaz-e mindig, hogy minden maximális folyam minden élen 0 vagy 2 értéket vesz fel?
5. Legyen adott egy  $G$  irányított gráf, az  $s \in V(G)$  rögzített csúcs és a  $c : E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$  kapacitásfüggvény. Tegyük fel, hogy bármely  $t \in V(G), t \neq s$  csúcs esetén az  $s$ -ből  $t$ -be vezető maximális folyam értéke legalább 100 és a  $t$ -ből  $s$ -be vezető maximális folyam értéke is legalább 100. Mutassuk meg, hogy ekkor bárhogy választjuk az  $u, v \in V(G), u \neq v$  csúcsokat, az  $u$ -ből  $v$ -be vezető maximális folyam értéke is legalább 100.
6. Legyen adott egy  $G$  irányított gráf, az  $s \in V(G)$  csúcs és a  $c : E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$  kapacitásfüggvény. Jelölje minden  $v \in V(G), v \neq s$  esetén  $m(v)$  az  $s$ -ből a  $v$ -be vezető maximális folyam értékét. Tegyük fel, hogy valamely  $t \in V(G)$  csúcsra  $m(t) = 100$ , de minden  $v \in V(G), v \neq s, t$  esetén  $m(v) > 100$ . Mutassuk meg, hogy ekkor a  $t$ -be érkező élek összkapacitása 100.