Többszörös összefüggőség, Menger tételei

Bevezetés a számításelméletbe 2
2021.
11. gyakorlat

Irányított/irányítatlan st-utakat lefogó élhalmaz (ponthalmaz).

Legyen G egy irányított/irányítatlan gráf és $s, t \in V(G)$ két különböző csúcs. Azt mondjuk, hogy egy $Z \subseteq E(G)$ élhalmaz (egy $Y \subseteq V(G)$ ponthalmaz) lefogja az összes s-ből t-be vezető irányított/irányítatlan utat, ha a Z-beli éleket (az Y-beli csúcsokat) elhagyva az s és t csúcsok különböző komponensekbe kerülnek.

Menger tételei.

- Ha G egy irányított/irányítatlan gráf, $s, t \in V(G)$ két tetszőleges csúcs, akkor a páronként élidegen irányított/irányítatlan st-utak maximális száma megegyezik az összes irányított/irányítatlan st-utat lefogó élek minimális számával.
- Ha G egy irányított/irányítatlan gráf, $s, t \in V(G)$ két nemszomszédos csúcs, akkor a páronként pontidegen irányított/irányítatlan st-utak maximális száma megegyezik az összes irányított/irányítatlan st-utat lefogó pontok minimális számával.

Többszörös pontösszefüggőség.

Egy G gráfot k-szorosan pontösszefüggőnek nevezünk, ha legalább $k+1$ pontja van, és akárhogy hagyunk el belőle k-nál kevesebb pontot, a maradék gráf összefüggő marad.

A legnagyobb olyan k egész számot, amelyre még a G gráf k-szorosan összefüggő, $\kappa(G)$-vel jelöljük.

Többszörös élösszefüggőség.

Egy G gráfot k-szorosan élösszefüggőnek nevezünk, ha akárhogy hagyunk el belőle k-nál kevesebb élet, a maradék gráf összefüggő marad.

A legnagyobb olyan k egész számot, amelyre még a G gráf k-szorosan élösszefüggő, $\lambda(G)$-vel jelöljük.

Menger tétele többszörös élösszefüggőségre.

A G gráf akkor és csak akkor k-szorosan élösszefüggő, ha bármely két pontja között létezik k élidegen út.

Menger tétele többszörös pontösszefüggőségre.

A G gráf akkor és csak akkor k-szorosan pontösszefüggő, ha legalább $k+1$ pontja van, és bármely két pontja között létezik k pontidegen út.

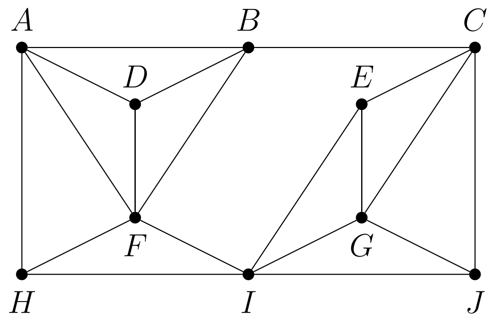
Megfigyelés.

Tetszőleges G gráf esetén $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$, ahol $\delta(G)$ a gráf minimális fokszámát jelöli.

1. Maximálisan hány páronként él-, illetve pontdiszjunkt út adható meg az alábbi pontpárok között az alábbi gráfban?

   (a) B és I; (b) A és J; (c) B és C.

   Határozzuk meg a gráf pont-, illetve élösszefüggőségi számát.



2. Hányszorosan összefüggő/élösszefüggő
   (a) egy fa;
   (b) egy kör;
   (c) egy teljes gráf;
   (d) egy teljes páros gráf?
3. A 15 pontú G gráf egy 4 pontú, egy 5 pontú és egy 6 pontú körből készült úgy, hogy az 5 pontú kör minden csúcsát összekötöttük (egyetlen éllel) a másik két kör minden csúcsával. Legyen s a 4 pontú kör egyik csúcsa, t pedig a 6 pontú kör egyik csúcsa.
   (a) Maximálisan hány páronként pontdiszjunkt út adható meg s és t között G-ben?
   (b) Maximálisan hány páronként éldiszjunkt út adható meg s és t között G-ben?
4. Húzzunk be 3 élet két diszjunkt 5 csúcsú teljes gráf csúcsai közé úgy, hogy a kapott G gráf egyszerű legyen. Igaz-e, hogy G minden esetben
   (a) háromszorosan összefüggő;
   (b) háromszorosan élösszefüggő?
5. Tegyük fel, hogy a G gráfban a rögzített x és y pontokat összekötő pontidegen utak maximális száma 5. Lehet-e az x és y pontokat összekötő utakat lefogó élek minimális száma 1, 2, 3, 4, 5, 6 vagy 7?
6. Mutassuk meg, hogy egy háromszorosan összefüggő gráfban mindig létezik páros hosszúságú kör.
7. A G egyszerű, n csúcsú gráfban bármely két, nemszomszédos csúcsra teljesül, hogy a fokszámaik összege legalább $n+k-2$ (ahol $n > k \geq 1$ egész). Bizonyítsuk be, hogy G k-szorosan összefüggő.
8. Bizonyítsuk be, hogy ha a G irányított gráfban van u-ból v-be is és v-ből w-be is k éldiszjunkt irányított út, akkor G-ben létezik u-ból w-be is k éldiszjunkt irányított út.
9. Legyen G egy hurokélmentes, irányítatlan gráf és $s \in V(G)$ egy rögzített csúcs. Jelölje minden $v \in V(G)$, $v \neq s$ esetén $\lambda(v)$ az s-ből a v-be vezető, páronként éldiszjunkt utak maximális számát. Tegyük fel, hogy valamely $t \in V(G)$ csúcsra $\lambda(t) = 10$, de minden $v \in V(G)$, $v \neq s, t$ esetén $\lambda(v) > 10$. Mutassuk meg, hogy ekkor t foka 10.
10. Egy 10 csúcsú egyszerű gráfnak 40 éle van. Határozzuk meg a legnagyobb olyan k számot, melyre a gráf biztosan k-szorosan pontösszefüggő.
11. Legyen G egy k-szorosan összefüggő gráf és A és B a G csúcsainak k elemű, diszjunkt részhalmazai. Bizonyítsuk be, hogy létezik G-ben k darab páronként (teljes egészében, nem csak belsőleg) pontdiszjunkt út úgy, hogy mindegyik A és B-beli pontokat köt össze.