Mélységi bejárás

Bevezetés a számításelméletbe 2
13. gyakorlat

1. Éllistájukkal adottak az alábbi G_1 és G_2 irányított gráfok.

   G_1 : $\boldsymbol{a} : b, c, d$; $\boldsymbol{b} : d$; $\boldsymbol{c} : d$; $\boldsymbol{d} : e$; $\boldsymbol{e} : a$

   G_2 : $\boldsymbol{a} : f, g$; $\boldsymbol{b} : a, g$; $\boldsymbol{e} : c, d$; $\boldsymbol{f} : e$; $\boldsymbol{g} : e, f$

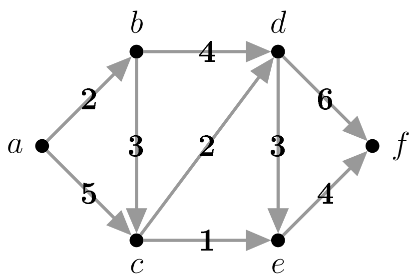
   (a) Keressünk a G_1 és G_2 gráfokban egy-egy mélységi feszítőerdőt!

   (b) Döntsük el mélységi bejárás segítségével, hogy ezek a gráfok aciklikusak-e!

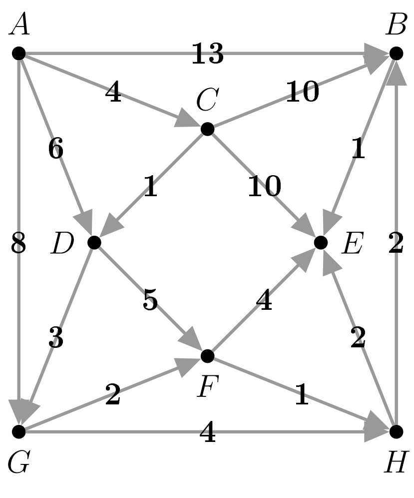
   (c) Amelyik gráf aciklikus, abban adjunk meg egy topologikus sorrendet.

2. A 6 pontú irányított G gráf csúcsait jelölje x, y, z, u, v, w. A gráf egy mélységi bejárásánál a mélységi, illetve a befejezési számok a következők. x : $1, 6$; y : $2, 4$; z : $6, 5$; u : $3, 3$; v : $4, 1$; w : $5, 2$. Adjuk meg a bejáráshoz tartozó mélységi feszítőfa éleit.

3. Döntsük el az alábbi gráfról, hogy aciklikus-e, majd határozzuk meg az alábbi gráfban az a csúcsból az összes többi csúcsba vezető legrövidebb, illetve leghosszabb utat!



4. Döntsük el, hogy az alábbi gráf aciklikus-e és ha igen, adjuk meg egy topologikus sorrendjét, majd számítsuk ki az A csúcsból a többi csúcsba menő legrövidebb és leghosszabb utak hosszát.



5. Legyen G egy egyszerű, irányítatlan, összefüggő gráf. Igaz-e, hogy

   (a) G minden f éléhez van G-nek olyan mélységi bejárása valamelyik csúcsból, amelyben f faél;

(b) G minden f éléhez van G-nek olyan szélességi bejárása valamelyik csúcsból, amelyben f faél;

(c) G minden f éléhez van G-nek olyan mélységi bejárása minden csúcsból, amelyben f faél;

(d) G minden f éléhez van G-nek olyan szélességi bejárása minden csúcsból, amelyben f faél;

(e) G minden F feszítőfájához van G-nek olyan mélységi bejárása, amelyben F minden éle faél;

(f) G minden F feszítőfájához van G-nek olyan szélességi bejárása, amelyben F minden éle faél?

6. Legyen G egy irányítatlan, összefüggő, 10 csúcsú, 10 élű gráf. Mutassuk meg, hogy G bármely feszítőfája előáll G egy alkalmas csúcsból indított mélységi kereséshez tartozó DFS-fájaként.

7. Bizonyítsuk be, hogy minden $G = (V, E)$ irányított gráf felbontható két aciklikus gráfrara; pontosabban az élhalmazának van olyan E_1, E_2 partíciója ($E = E_1 \cup E_2$ és $E_1 \cap E_2 = \emptyset$), hogy a $G_1 = (V, E_1)$ és a $G_2 = (V, E_2)$ gráfok aciklikusak!

8. Van b darab borítékunk, az i-ediknek a hossza h_i, a magassága m_i. Az i-edik borítékba akkor tudjuk berakni a j-edik borítékot, ha $h_j < h_i$ és $m_j < m_i$ is teljesül (nem forgatjuk és nem is hajtogatjuk a borítékokat). Célunk, hogy minél hosszabb olyan láncot alakítsunk ki, hogy az i-edikben benne van a j-edik, abban a k-adik, stb. Legyen adott egy $L > 0$ egész és a h_i és m_i számok. Adjunk hatékony algoritmust annak eldöntésére, hogy kialakítható-e a borítékokból egy L hosszú lánc?

9. Egy falutörténet írója n korábbi lakosról gyűjtött információkat. A kérdésekre kapott válaszok a következő típusúak voltak.

   - S_i személy meghalt S_j születése előtt;
   - S_i személy élete során született S_j;
   - S_i személy korábban született, mint S_j;
   - S_i korábban halt meg, mint S_j.

   Egy S_i, S_j párra nem biztos, hogy szerepel minden választípus, és olyan pár is lehet, amely egyetlen válaszban sem szerepel együtt. Mivel az emberek időnként rosszul emlékeznek, nem biztos, hogy minden információ helyes. Adjunk hatékony algoritmust, amivel k darab fenti típusú válaszról eldönthető, hogy van-e közöttük ellentmondás.