Gráfelméleti alapfogalmak

Bevezetés a számításelméletbe 2
2021.
2. gyakorlat

Komplementer gráf.

Egy G egyszerű gráf komplementerén azt a $\overline{G}$ gráfot értjük, melyben két csúcs pontosan akkor szomszédos, ha G-ben nem azok.

Izomorfia.

A G_1 és G_2 gráfokat izomorfaknak nevezzük, ha a csúcshalmazaik között létezik olyan kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, hogy G_1-ben bármely két csúcs között pontosan annyi él fut, mint a nekik megfelelő csúcsok között G_2-ben.

Fa.

Egy összefüggő, körmentes gráfot fának nevezünk.

Fák tulajdonságai.

– Minden n csúcsú fának $n-1$ éle van.
– Minden legalább kétcsúcsú fának van legalább két levele.

Feszítőfa.

A G gráf egy feszítőfáján a G egy olyan részgráfját értjük, amely egy fa és G minden csúcsát tartalmazza.

Feszítőfa létezése.

Egy gráfnak pontosan akkor létezik feszítőfája, ha összefüggő.

1. Az előre megszámozott (címkézett) n darab pont közé hányféleképp húzhatunk be éleket úgy, hogy egyszerű gráfhoz jussunk?

2. Legyenek a G egyszerű gráf csúcsai az $1, 2, \dots, 10$ számok, és két különböző csúcs között akkor fusson él, ha a két szám különbsége páratlan. Hány 4 hosszú köre van a G gráfnak?

3. Hány feszítőfája van a $K_{2,n}$ teljes páros gráfnak (a gráf csúcsai $a_1, a_2, b_1, b_2, \dots, b_n$, és tetszőleges $i \in \{1, 2\}$ és $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén az a_i és a b_j csúcs között vezet él)?

4. Van olyan G gráf, melyben minden csúcs foka különböző? És ha a gráf egyszerű?

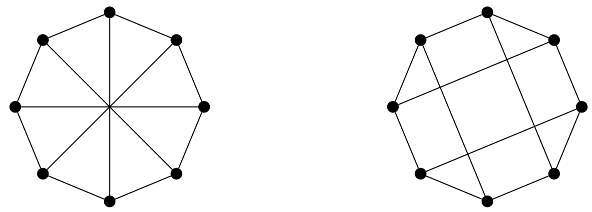
5. Döntsük el, van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a pontok foka rendre 1, 2, 2, 3, 3, 3 ill. 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4 ill. 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7 ill. 1, 3, 3, 4, 5, 6, 6.

6. Mi lehet a G gráf, ha $\Delta(G) \leq 2$? ($\Delta(G)$ a G gráf maximális fokszámát jelöli.)

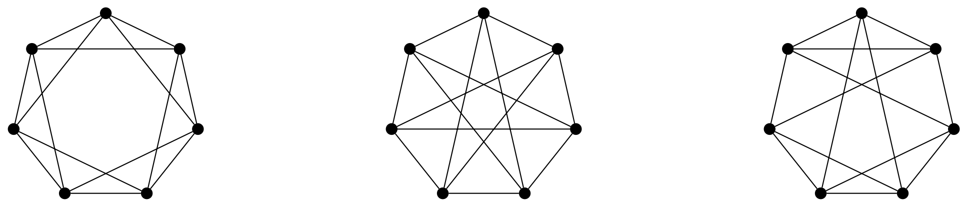
7. Rajzoljuk le az összes olyan, páronként nem izomorf, egyszerű gráfot, melyre

   (a) $n = 4$, $m = 5$; (b) $n = 5$, $m = 3$; (c) $n = 5$, $m = 7$; (d) $n = 5$, $m = 8$.

8. Egy G gráf pontjai legyenek egy kocka csúcsai; két pont akkor legyen szomszédos, ha a kockában a megfelelő csúcsok él mentén szomszédosak. Az alábbi két gráf közül melyek izomorfak G-vel?



9. Melyek izomorfak az alábbi gráfok közül?



10. Mutassunk a komplementerével izomorf 5-, ill. 6-pontú gráfot!

11. Határozzuk meg az összes olyan (legalább két csúcsú) fát, amely izomorf a saját komplementerével. (Az egymással izomorf megoldásokat tekintsük azonosnak.)

12. Hány pontja van annak a T fának, melyre $|E(\overline{T})| = 15 \cdot |E(T)|$?

13. Mutassuk meg, hogy nem létezik olyan $n \geq 5$ csúcsú fa, melyben pontosan két fokszám fordul elő, mégpedig mindkettő $n/2$-ször (n páros).

14. A G egyszerű gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Az $x, y \in V(G)$, $x \neq y$ csúcsok pontosan akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $|x - y| \leq 2$. Van-e G-nek olyan feszítőfája, amely

    (a) tartalmazza G-nek az összes olyan $\{x, y\}$ élét, amelyre $x, y \leq 3$ teljesül;

    (b) tartalmazza G-nek az összes olyan $\{x, y\}$ élét, amelyre $|x - y| = 2$ teljesül?

15. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges T fának legalább $\Delta(T)$ levele van.

16. Bizonyítsuk be, hogy ha egy fába behúzunk egy élt, akkor pontosan egy kör keletkezik.

17. Egy n csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább $n/2$. Következik-e ebből, hogy a gráf összefüggő?

18. Egy 23 csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább 7. Mutassuk meg, hogy bárhogy választunk ki a gráf csúcsai közül hármat, lesz köztük két olyan, melyek között van a gráfban út.

19. Egy 20 csúcsú egyszerű gráfban nincs izolált csúcs, az egyfokú csúcsok száma pedig pontosan 3. Mutassuk meg, hogy a gráfnak legalább 19 éle van.

20. A 20 csúcsú G egyszerű gráfban 10 csúcs foka legfeljebb 7, a maradék 10 csúcs foka pedig legalább 16. Hány éle van G-nek?

21. Egy 100 csúcsú összefüggő, egyszerű gráfnak 100 éle van. Mutassuk meg, hogy ekkor van a gráfban 3 páronként különböző feszítőfa. (Két feszítőfa akkor különböző, ha nem pontosan ugyanazon élek alkotják.)

22. Igazoljuk, hogy minden összefüggő gráfnak van olyan csúcsa, amelyet elhagyva a gráf összefüggő marad!

23. Adjuk meg az összes olyan 25 csúcsú F fát, amelyre létezik olyan $m \geq 2$ egész, hogy F minden pontjának a foka azonos maradékot ad m-mel osztva.