Szélességi bejárás, minimális összsúlyú feszítőfák

Bevezetés a számításelméletbe 2
2021.
3. gyakorlat

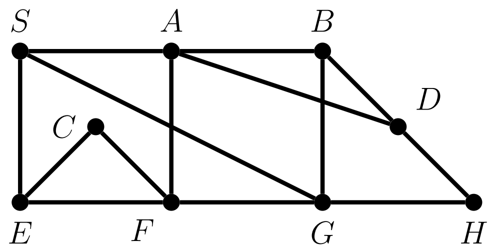
1. Adott a G irányítatlan gráf a következő éllistával:

$\boldsymbol{a}$: b, c;	$\boldsymbol{b}$: a, d;	$\boldsymbol{c}$: a, d;	$\boldsymbol{d}$: b, c, e, f;
$\boldsymbol{e}$: d, f, g;	$\boldsymbol{f}$: d, e, g, h;	$\boldsymbol{g}$: e, f, h;	$\boldsymbol{h}$: f, g.

   Keressünk G-ben a-ból kiinduló szélességi feszítőfát! Mennyi lesz a csúcsok a-tól való távolsága?

2. (a) A BFS algoritmus az alábbi gráf csúcsait a következő sorrendben járta be: S, $\square$, $\square$, $\square$, H, $\square$, F, C, $\square$. Egészítsük ki a sorozatot a hiányzó csúcsok neveivel és adjuk meg a bejáráshoz tartozó BFS-fát.

   (b) Tartalmazhatja-e a $\{D, H\}$ élet a gráf egy S-ből indított tetszőleges BFS bejárásához tartozó BFS-fája?



3. Legyen G egyszerű, irányítatlan gráf, a és b pedig G két különböző csúcsa. Igaz-e, hogy ha G-nek egy, az a-ból indított szélességi bejárása a b csúcsot ötödiknek találja meg, akkor biztosan létezik G-nek olyan, b-ből indított szélességi bejárása, mely az a csúcsot ötödiknek találja meg?

4. A G összefüggő gráfban minden pont foka 3. Az s csúcsából indított BFS algoritmus a v csúcsot 13.-ként éri el (az elsőnek elért csúcs s). Előfordulhat-e, hogy v távolsága s-től

   (a) 2; (b) 3; (c) 8?

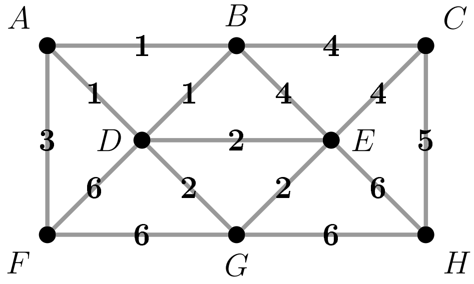
5. (a) Tervezzünk olyan algoritmust, amely egy adott G gráf és $e \in E(G)$ él esetén eldönti, hogy G-ben van-e e-t tartalmazó kör és ha igen, akkor megtalálja az ilyen körök közül a legrövidebbek egyikét.

   (b) Mi a helyzet akkor, ha adott él helyett egy adott $v \in V(G)$ csúcsot tartalmazó legrövidebb kört kell találnunk?

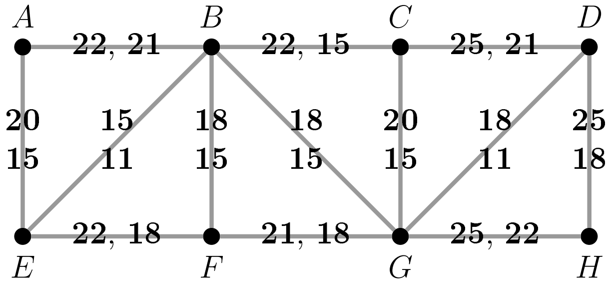
6. Egy összefüggő G gráf egy F feszítőfáját nevezzük a gráf v csúcsára illeszkedőnek, ha G-nek van olyan, a v csúcsból indított BFS bejárása, amihez tartozó BFS-fa éppen F. Legfeljebb hány éle lehet egy 100 csúcsú G összefüggő gráfnak, ha van olyan feszítőfája, ami G minden csúcsára illeszkedik?

7. (a) Határozzuk meg az alábbi gráf egy minimális összsúlyú feszítőfáját!

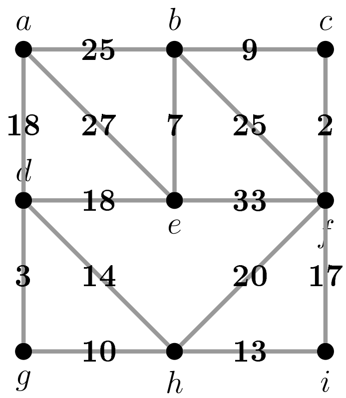
   (b) Hány különböző kimenete van a Kruskal-algoritmusnak?



8. Az alábbi ábrán látható G gráf élei a felújítandó útszakaszokat jelentik. Minden élen két költség van: az olcsóbbik az egyszerű felújítás költsége, a drágább pedig ugyanez, kerékpárút építéssel. A cél az összes útszakasz felújítása úgy, hogy összefüggő kerékpárúthálózat épüljön ki, amelyen G minden pontja elérhető. Határozzunk meg egy lehető legolcsóbb felújítási tervet, ami teljesíti ezt a feltételt.



9. Az alábbi ábrán látható a G irányítatlan gráf és az élek költségei. Határozzuk meg, hogy ha az e és a h csúcsok közé behúzunk egy új élet, akkor ezen élnek milyen (nemnegatív) költséget adhatunk ahhoz, hogy biztosan benne legyen a kapott gráfnak legalább egy minimális összsúlyú feszítőfájában.



10. Legyen G összefüggő gráf és $w: E(G) \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény G élein. Tegyük fel, hogy G-ben az e él egyik végpontja v és a v-re illeszkedő minden f élre $w(e) \leq w(f)$ teljesül. Mutassuk meg, hogy G-nek van olyan minimális összsúlyú feszítőfája, ami tartalmazza e-t.

11. Legyen G összefüggő gráf és $w: E(G) \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény G élein. Legyen továbbá C egy kör G-ben és e a C egy éle. Tegyük fel, hogy a C kör minden f élére $w(f) \leq w(e)$ teljesül. Mutassuk meg, hogy G-nek van olyan minimális összsúlyú feszítőfája, ami nem tartalmazza e-t.

12. Legyen G egy összefüggő gráf és $w: E(G) \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény G élein. Mutassuk meg, hogy G minden minimális összsúlyú feszítőfája megkapható a Kruskal-algoritmus egy lehetséges futásának eredményeként.