

Színezés

Bevezetés a számításelméletbe 2

2021.

5. gyakorlat

Kromatikus szám

A G egyszerű gráf csúcsainak egy színezésén színeknek a csúcsokhoz való olyan hozzárendelését értjük, melyben szomszédos csúcsok különböző színt kapnak.

A G egyszerű gráf kromatikus száma $\chi(G) = k$, ha G k színnel kiszínezhető, de $k - 1$ színnel nem.

Klikk

A G gráf egy teljes részgráfját klikknek nevezzük. A G -ben található maximális méretű klikk méretét $\omega(G)$ -vel jelöljük és a gráf klikkszámának nevezzük.

Állítás

Minden G gráfra $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ teljesül.

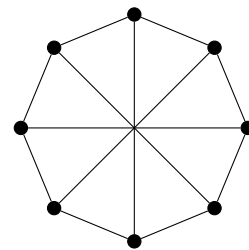
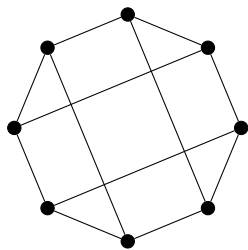
Páros gráf

Egy G gráfot páros gráfnak nevezünk, ha $\chi(G) \leq 2$, azaz ha a csúcshalmaza felbontható két diszjunkt halmazra úgy, hogy a G minden éle kizárólag eközött a két halmaz között futhat.

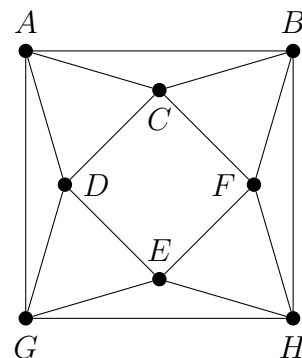
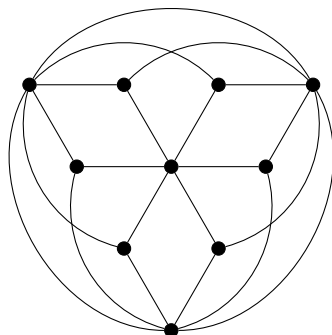
Állítás

Egy gráf pontosan akkor páros, ha nem tartalmaz páratlan hosszú kört.

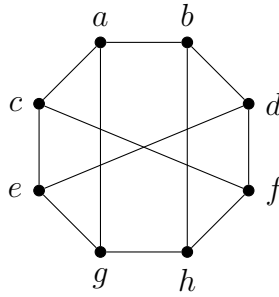
1. Döntsük el, hogy az alábbi gráfok párosak-e!



2. Határozzuk meg az alábbi gráfok kromatikus számát.



3. Állapítsuk meg, hány szín kell az alábbi ábrán látható G gráf a, b, c, d, e, f, g, h sorrendben történő mohó színezéséhez. Milyen színt kap ekkor a h csúcs?



4. Egy egyszerű gráfban pontosan egy páratlan kör van. Határozzuk meg a gráf kromatikus számát.
5. Legyen a G gráf csúcshalmaza $V(G) = \{1, 2, 3, \dots, 9999\}$ és tegyük fel, hogy G minden csúcsa a nála kisebb számok közül legfeljebb tízzel szomszédos. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 11$.
6. Egy 10 csúcsú egyszerű gráfban van egy 5, egy 4 és egy 3 fokú csúcs, minden más csúcs foka 2. Mutassuk meg, hogy a gráf színezhető 3 színnel.
7. Legyen a G teljes gráf csúcshalmaza $V(G) = \{1, 2, \dots, 10\}$. Hagyjuk most el G -ből az $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$ és a $(4, 5)$, $(4, 6)$, $(5, 6)$ éleket. Határozzuk meg a kapott gráf kromatikus számát.
8. Egy szabályos tízszögnek behúzzuk az összes legrövidebb átlóját. Határozzuk meg a kapott (10 csúcsú, 20 élű) gráf klikkszámát és kromatikus számát.
9. A $K_{3,3}$ teljes páros gráfba behúzzunk két nem csatlakozó élet úgy, hogy a kapott G gráf egyszerű legyen. Határozzuk meg G kromatikus számát.
10. Készítsük el a G gráfot egy 7 hosszú körből úgy, hogy hozzáadunk a körhöz $\binom{7}{3}$ új csúcsot, és az új csúcsok mindegyikét a kör három pontjával kötjük össze úgy, hogy semelyik két új csúcsnak se ugyanazok a körbeli csúcsok legyenek a szomszédai. Határozzuk meg a G gráf $\chi(G)$ kromatikus számát.
11. Tegyük fel, hogy a G gráf 4-színezhető és véges. Igazoljuk, hogy kiválasztható G éleinek legfeljebb hatodrésze úgy, hogy a kiválasztott élek G -ből való törlésével kapott G' gráf 3-színezhető legyen.
12. Legyen G olyan 7 csúcsú egyszerű gráf, melyre G -ben és a komplementerében is van Hamilton-kör. Mutassuk meg, hogy ekkor G kromatikus száma 3 vagy 4.
13. Egy sakkasztán 7 huszár áll úgy, hogy mindegyik legalább két másikat tud ütni. Mutassuk meg, hogy biztosan van közöttük olyan, amelyik három másikat is tud ütni.
14. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges e élű egyszerű gráf élei közül elhagyható legfeljebb $e/2$ úgy, hogy a maradék gráf páros legyen.
15. Bizonyítsuk be, hogy minden e élű G egyszerű gráfra $e \geq \binom{\chi(G)}{2}$ teljesül.
16. Adjunk meg olyan gráfot, melyből tíz alkalmas élet törölve a kromatikus szám tízzel csökken és határozzuk meg az ilyen gráfok csúcsszámának minimumát.
17. Adjunk példát olyan gráfra, melynek kromatikus száma 8, de egy alkalmas Hamilton-körének éleit törölve a kromatikus szám 4-re csökken.