Párosítások

Bevezetés a számításelméletbe 2

2021.

8. gyakorlat

Frobenius-tétel

Egy $G = (A, B; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha $|A| = |B|$ és minden $X \subseteq A$ részhalmazra $|X| \leq |N(X)|$ teljesül.

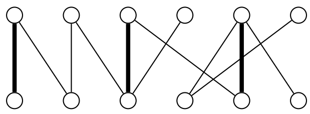
Hall-tétel

Egy $G = (A, B; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor van A-t lefedő párosítás, ha minden $X \subseteq A$ részhalmazra $|X| \leq |N(X)|$ teljesül.

Tutte-tétel

Egy G gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha tetszőleges $X \subset V$ esetén $c_p(G - X) \leq |X|$, ahol $c_p(G - X)$ a $G - X$ gráf páratlan méretű komponenseinek a száma.

1. Az ábrán látható G gráfban keressünk maximális párosítást a javító utas algoritmussal a vastag vonalakkal jelölt párosításból kiindulva, valamint adjunk meg egy minimális lefogó ponthalmazt is.



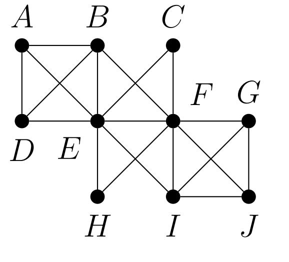
2. Egy $G(A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_9\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_9\}$. Minden $1 \leq i \leq 9$ és $1 \leq j \leq 9$ esetén a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha az alábbi mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg G-ben egy maximális párosítást és egy minimális lefogó csúcshalmazt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Egy 100 csúcsú G páros gráfnak van teljes párosítása. Határozzuk meg a lefogó pontok minimális számát abban a H gráfban, melyet G-ből egy tetszőleges további él behúzásával kapunk.

4. Tegyük fel, hogy a 88 pontú G páros gráfban $\alpha(G) = 44$. Igazoljuk, hogy G-re teljesül a Hall-feltétel, azaz $|X| \leq |N(X)|$ az A színosztály minden X részhalmaza esetén.

5. Használjuk Tutte tételét annak igazolására, hogy az alábbi gráfban nincs teljes párosítás.



6. Használjuk Tutte tételét annak eldöntésére, hogy egy ötcsúcsú körben van-e teljes párosítás.
7. Legyen a 100 csúcsú, egyszerű G gráfnak X egy 52 pontból álló független ponthalmaza és legyenek x, y és z különböző X-beli csúcsok. Tartalmazhat-e a $G + xy + yz + zx$ gráf teljes párosítást?
8. Egy 100 csúcsú egyszerű, összefüggő gráf tetszőlegesen kiválasztott 3 pontja között fut legalább egy él. Bizonyítsuk be, hogy létezik a gráfban teljes párosítás. Igaz-e az állítás 3 helyett 4 pont esetén?
9. Tegyük fel, hogy a G egyszerű, páros gráf A színosztálya 28, a B színosztálya 33 pontú, valamint a B színosztálynak valamely Y részhalmazára $|Y| = 18$ és $|N(Y)| = 12$. Mutassuk meg, hogy az A színosztályra nem teljesül a Hall-feltétel.
10. Egy 12 fiúból és 12 lányból álló társaságban mindenki legalább 6 embert ismer az ellenkező neműek közül (az ismeretségek kölcsönösek). Bizonyítsuk be, hogy ekkor az egész társaság egymást ismerő fiú-lány párokba állítható.
11. G egy páros gráf, A és B osztályokkal, és minden $X \subseteq A$ halmazra $|N(X)| \geq |X| - 1$. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz olyan párosítást, ami A-t egy pont kivételével lefedi.
12. G egy páros gráf, A és B színosztályokkal. A-ban minden pont foka 40, B-ben 30.
    (a) Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz A-t fedő párosítást.
    (b) Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz 10 éldiszjunkt A-t fedő párosítást.
13. Egy 10 csúcsú páros gráfban minden csúcs foka 3 vagy 4. Mutassuk meg, hogy a gráfban van teljes párosítás.
14. A villamosmérnök-hallgatók számára beüzemeltek néhány számítógépet. Minden hallgatónak legalább 10 gépre van belépési jogosultsága, minden gépen pedig legfeljebb 7 hallgatónak van felhasználói fiókja. Igaz-e, hogy ekkor bizonyosan leültethetünk minden villamosmérnök-hallgatót egy-egy különböző számítógéphez úgy, hogy mindenki olyan géphez üljön, amire be tud lépni?
15. Valaki találomra szétosztott egy pakli francia kártyát 13 darab 4 lapból álló csomagba. Bizonyítsuk be, hogy ekkor mindegyik csomagból kiválasztható egy lap úgy, hogy a kiválasztott lapok között mindegyik fajta figurából éppen egy legyen (vagyis egy 2-es, egy 3-as, …, egy ász).
16. Egy szigeten n család lakik. A sziget elöljárói felosztották az egész szigetet n egyenlő területű vadászati körzetre és ezzel egyidejűleg (az előbbitől függetlenül, ezért egészen más módon) felosztották az egész szigetet n egyenlő területű mezőgazdasági területre. Most azt szeretnék elérni, hogy minden családhoz tartozzon egy vadászati és egy mezőgazdasági terület úgy, hogy a két területnek legyen közös része. Megoldható-e ez mindig?
17. A faluban $2n$ lány és $2n$ fiú él. A lányoknak – akik párosával testvérek, és nem rokonaik a fiúknak – az a céljuk, hogy úgy házasodjanak össze a falubeli fiúkkal, hogy minden lány le tudja nyomni a férjét szkanderban. Tudjuk, hogy az i-edik lánytestvérpár bármelyik tagja képes legalább $2i - 1$ fiút szkanderban legyőzni, ráadásul minden lány le tud győzni olyan fiút is, akit a testvére nem. Mutassuk meg, hogy lehetséges a kívánt házasítás!