

Élszínezés, folyamatok
Bevezetés a számításelméletbe 2
2021.
9. gyakorlat

Élkromatikus szám

A G gráf élkromatikus száma $\chi_e(G) = k$, ha G élei k színnel színezhetőek, de $k - 1$ színnel nem.

Állítás

Tetszőleges G gráfra $\Delta(G) \leq \chi_e(G)$ teljesül.

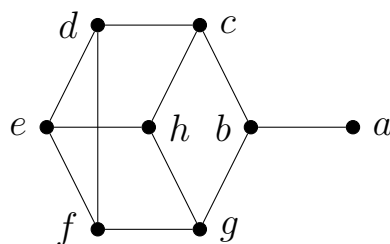
Vizing-tétel

Ha G egy egyszerű gráf, akkor $\chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Kőnig-tétel

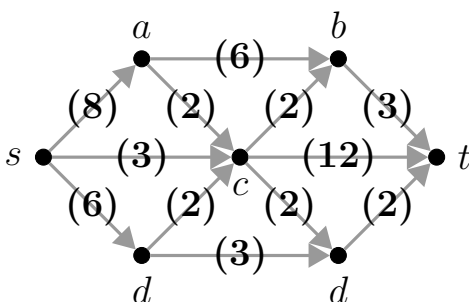
Ha G egy páros gráf, akkor $\chi_e(G) = \Delta(G)$.

1. Határozzuk meg az alábbi gráf élkromatikus számát.



2. Határozzuk meg egy 6 csúcsú kör komplementerének élkromatikus számát!
3. Határozzuk meg a tripla ötszög (vagyis azon gráf, melyet úgy kapunk, hogy egy öt hosszú kör minden élét három párhuzamos éllel helyettesítjük) élkromatikus számát.
4. Egy 20 csúcsú fában 11 csúcs foka 1 és a maradék 9 csúcs foka is azonos (de persze nem 1). Határozzuk meg a fa élkromatikus számát.
5. Legyen G olyan 3-reguláris egyszerű gráf, melyben van elvágó él (azaz olyan él, melyet elhagyva a gráf szétesik). Mutassuk meg, hogy ekkor $\chi_e(G) = 4$.
6. A G egyszerű gráf v csúcsának foka 2, minden más pont foka 3. Határozzuk meg $\chi_e(G)$ -t.
7. Legyen G 99 csúcsú egyszerű gráf, melyben minden csúcs fokszáma ugyanannyi. Bizonyítsuk be, hogy G élkromatikus száma páratlan.
8. Egy 99 csúcsú gráfnak van két olyan Hamilton-köre, melyeknek nincsen közös éle. Mutassuk meg, hogy a gráf élkromatikus száma legalább 5.

9. Mutassuk meg, hogy ha G 9 csúcsú egyszerű gráf, akkor $\chi_e(G) + \chi_e(\overline{G}) \geq 9$.
10. (a) Mutassuk meg, hogy ha G 3-reguláris gráf, melynek van Hamilton-köre, akkor $\chi_e(G) = 3$.
 (b) Bizonyítsuk be, hogy a Petersen-gráfban nincs Hamilton-kör.
11. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges e élű G gráf esetén az alábbiak teljesülnek.
 (a) $\chi_e(G) + \nu(G) \leq e + 1$
 (b) $\chi_e(G) \cdot \nu(G) \geq e$
12. Legyen G egy 20 csúcsú egyszerű gráf, amelyben minden pont foka 8. Legyen v a G egy tetszőleges csúcsa és jelölje $G - v$ azt a gráfot, amelyet G -ből a v (és az összes v -re illeszkedő él) törlésével kapunk. Bizonyítsuk be, hogy $\chi_e(G - v) = \chi_e(G)$.
13. Létezik-e olyan egyszerű gráf, melynek élkromatikus száma 5, de egy alkalmas Hamilton-körének éleit törölve az élkromatikus szám 2-re csökken?
14. Adjunk meg egy maximális folyamot az alábbi hálózatban.



15. Növeljük a megadott folyamot, ha ez lehetséges!

