Leszámlálási feladatok

Bevezetés a számításelméletbe 2

1. gyakorlat

2022.

Ismétlés nélküli permutáció.

Adott n darab különböző elem összes lehetséges sorrendje

$$n! := \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 0, \\ n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1, & \text{ha } n > 0. \end{cases}$$

Ismétléses permutáció.

Adott n darab elem között az azonosak száma $k_1, k_2, \ldots, k_l$ (tehát $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_l$); ezek összes lehetséges sorrendje

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_l!}.$$

Ismétlés nélküli variáció.

Adott n darab különböző elem közül k különböző darabot kiválasztunk és sorbarendezünk; ezen lehetőségek száma

$$\frac{n!}{(n-k)!}.$$

Ismétléses variáció.

Adott n darab különböző elem közül k darabot kiválasztunk úgy, hogy megengedünk ismétlődő elemeket is és tekintettel vagyunk a sorrendre; ezen lehetőségek száma

$$n^k.$$

Ismétlés nélküli kombináció.

Adott n darab különböző elem közül választunk ki k darabot úgy, hogy a sorrendre nem vagyunk tekintettel; ezen lehetőségek száma

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Ismétléses kombináció.

Adott n darab különböző elemből választunk ki k darabot úgy, hogy egy elem többször is választható és a sorrendre nem vagyunk tekintettel; ezen lehetőségek száma

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Binomiális tétel.

Tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

1. Egy fagyizóban 26 féle fagyit árulnak: **A**nanász, **B**anán, **C**itrom, …, **Z**öldalma. Hányféleképpen adhat a kiszolgáló fagyit egy vendégnek, ha az alábbi kérései vannak (de minden mást a kiszolgálóra bíz)?

   (a) 5 gombócot kér tölcsérbe; azt az egyet köti ki, hogy ne 5 ugyanolyan gombócot kapjon.

   (b) Egy gombóc **A**-t, két-két gombóc **B**-t és **C**-t és négy gombóc **D**-t kér, mindezt egyetlen tölcsérbe.

   (c) 5 tetszőleges gombócot kér tölcsérbe, de legyen közte (legalább egy) **L**icsi.

(d) 5 különböző gombócot kér tölcsérbe, de ne legyen közte **F**ahéj.

(e) 5 tetszőleges gombócot kér tányérra, de ne legyen közte **F**ahéj.

(f) 5 különböző gombócot kér tányérra, de legyen közte **K**örte vagy **P**isztácia (vagy mindkettő).

(g) 5 különböző gombócot kér tányérra, de ha van közte **G**omba, akkor ne legyen **N**arancs.

(h) 35 gombócot kér tányérra úgy, hogy minden íz szerepeljen, de semelyik se szerepeljen kettőnél többször.

2. Az összes lehetséges módon kitöltött lottószelvények között hány egy-, két-, három-, négytalálatos szelvény van?

3. 10 házaspár elment tangózni. Hányféleképpen alkothattak 10 táncospárt, ha mindenki ellenkező neművel táncolt és a 10 táncospár közül pontosan 7 tagjai alkottak egyben házaspárt is?

4. Hány olyan ötjegyű szám van, melynek számjegyei

(a) szigorú monoton csökkenőek;

(b) szigorú monoton növekvőek;

(c) monoton csökkenőek;

(d) monoton növekvőek?

5. Bizonyítsuk be, hogy

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

6. Adjuk meg az alábbi kifejezés értékét (két tizedesjegy pontossággal).

$$\log_2 \left[\binom{101}{0} + \binom{101}{1} + \binom{101}{2} + \ldots + \binom{101}{50} \right]$$

7. Bizonyítsuk be, hogy nemüres halmaznak ugyanannyi páros elemszámú részhalmaza van, mint ahány páratlan!

8. Bizonyítsuk be a következőket.

(a) $$\binom{k}{k}\binom{n-k}{0} + \binom{k}{k-1}\binom{n-k}{1} + \binom{k}{k-2}\binom{n-k}{2} + \ldots + \binom{k}{0}\binom{n-k}{k} = \binom{n}{k}$$

(b) $$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

(c) $$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n} = 2^{n-1}n$$

9. Hány bástyát lehet elhelyezni úgy a sakktáblán, hogy egyik se üsse a másikat? Hányféleképpen helyezhető el ez a maximális számú bástya a sakktáblán úgy, hogy ne álljanak ütésben?

(* Mik a válaszok futókra?)

10. Hányféleképpen állhat fel fotózáshoz két egymás mögötti sorba 20 különböző magasságú ember úgy, hogy minden hátsó sorban álló magasabb legyen annál, aki az első sorban közvetlenül előtte áll?

11. Hány olyan Neptun-kód készíthető, amely pontosan három betűt és három számjegyet tartalmaz és a kódban szereplő betűk mind különbözők?

12. Egyszerre dobunk 5 egyforma dobókockával. Hányféle lehet az eredmény?

13. Hányféleképp választhatók meg az $x_1, \ldots, x_{100}$ nemnegatív egészek úgy, hogy $x_1 + \ldots + x_{100} = 2019$ teljesüljön? Hogyan változik az eredmény, ha „nemnegatív” helyett „pozitívat” mondunk?