

# Gráfelméleti alapfogalmak

## BEVEZETÉS A SZÁMÍTÁSELMÉLETBE 2

### 2. gyakorlat

2021.

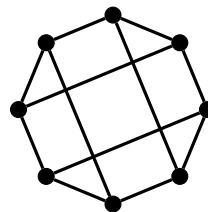
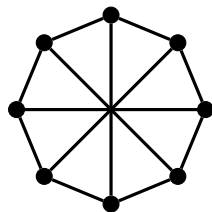
#### Komplementer gráf.

Egy  $G$  egyszerű gráf komplementerén azt a  $\bar{G}$  gráfot értjük, melyben két csúcspontosan akkor szomszédos, ha  $G$ -ben nem azok.

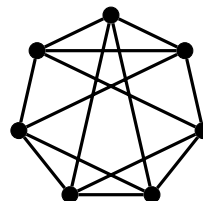
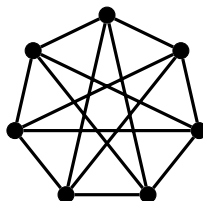
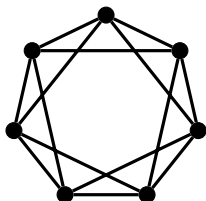
#### Izomorfia.

A  $G_1$  és  $G_2$  gráfokat izomorfaknak nevezzük, ha a csúcshalmazaik között létezik olyan kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, hogy  $G_1$ -ben bármely két csúcspontosan annyi él fut, mint a nekik megfelelő csúcsok között  $G_2$ -ben.

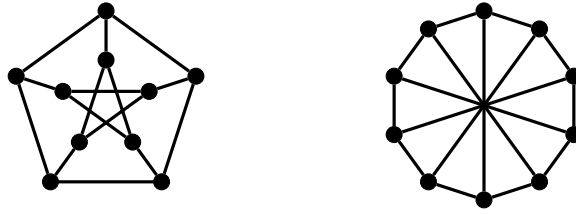
- Előre megszámozott (címkézett)  $n$  darab pont közé hányféleképp húzhatunk be éleket úgy, hogy egyszerű gráfhoz jussunk?
- Legyenek a  $G$  egyszerű gráf csúcsai az  $1, 2, \dots, 10$  számok, és két különböző csúcspontosan akkor fusson él, ha a két szám különbsége páratlan. Hány 4-hosszú köre van a  $G$  gráfnak?
- Van olyan  $G$  gráf, melyben minden csúcspont foka különböző? És ha a gráf egyszerű?
- Döntsük el, van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a pontok foka rendre
  - $1, 2, 2, 3, 3, 3,$
  - $1, 1, 2, 2, 3, 4, 4,$
  - $2, 3, 3, 4, 5, 6, 7,$
  - $1, 3, 3, 4, 5, 6, 6.$
- Mi lehet a  $G$  gráf, ha  $\Delta(G) \leq 2$ ? ( $\Delta(G)$  a  $G$  gráf maximális fokszámát jelöli.)
- Rajzoljuk le az összes olyan, páronként nem izomorf, egyszerű gráfot, melyre
  - $n = 4, m = 5;$
  - $n = 5, m = 3;$
  - $n = 5, m = 7;$
  - $n = 5, m = 8.$
- Egy  $G$  gráf pontjai legyenek egy kocka csúcsai; két pont akkor legyen szomszédos, ha a kockában a megfelelő csúcsok él mentén szomszédosak. Az alábbi két gráf közül melyek izomorfak  $G$ -vel?



- Melyek izomorfak az alábbi gráfok közül?



9. A  $G$  gráf csúcsai legyenek az  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  halmaz 2-elemű részhalmazai; két csúcs akkor legyen szomszédos, ha a megfelelő részhalmazok diszjunktak. Az alábbi gráfok közül melyek izomorfak  $G$ -vel?



10. Mutassunk a komplementerével izomorf 5-, ill. 6-pontú gráfot!
11. Egy  $n$ -csúcsú, egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább  $n/2$ . Következik-e ebből, hogy a gráf összefüggő?
12. Egy 100-csúcsú, egyszerű gráfban minden pont foka legalább 33. Mutassuk meg, hogy a gráfhoz hozzá lehet venni egyetlen új élt úgy, hogy a kapott gráf összefüggő legyen.
13. Egy 23-csúcsú, egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább 7. Mutassuk meg, hogy bárhogy választunk ki a gráf csúcsai közül hármat, lesz köztük két olyan, melyek között van a gráfban út.
14. Egy 20-csúcsú, egyszerű gráfban nincs izolált csúcs, az egyfokú csúcsok száma pedig pontosan 3. Mutassuk meg, hogy a gráfnak legalább 19 éle van.
15. A 20-csúcsú  $G$  egyszerű gráfban 10 csúcs foka legfeljebb 7, a maradék 10 csúcs foka pedig legalább 16. Hány éle van  $G$ -nek?
16. A 6-csúcsú  $G$  gráf hurokért nem, de többszörös éleket tartalmazhat. Tudjuk, hogy  $G$  bármely két csúcsának a foka különböző. Minimálisan hány éle van  $G$ -nek?
17. Bizonyítsuk be, hogy egy egyszerű gráf és a komplementere közül legalább az egyik mindig összefüggő.