Fák, szélességi bejárás

Bevezetés a számításelméletbe 2

3. gyakorlat

2022.

Fa.

Egy összefüggő, körmentes gráfot fának nevezünk.

Fák tulajdonságai.

- Minden n-csúcsú fának $n-1$ éle van.
- Minden legalább kétcsúcsú fának van legalább két levele.

Feszítőfa.

A G gráf egy feszítőfáján a G egy olyan részgráfját értjük, amely egy fa és G minden csúcsát tartalmazza.

Feszítőfa létezése.

Egy gráfnak pontosan akkor létezik feszítőfája, ha összefüggő.

1. Határozzuk meg az összes olyan (legalább két csúcsú) fát, amely izomorf a saját komplementerével. (Az egymással izomorf megoldásokat tekintsük azonosnak.)

2. Mutassuk meg, hogy nem létezik olyan $n \geq 5$ csúcsú fa, melyben pontosan két fokszám fordul elő, mégpedig mindkettő $n/2$-ször (n páros).

3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy fába behúzunk egy élt, akkor pontosan egy kör keletkezik.

4. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges T fának legalább $\Delta(T)$ levele van.

5. Egy 100-csúcsú, összefüggő, egyszerű gráfnak 100 éle van. Mutassuk meg, hogy ekkor van a gráfban 3 páronként különböző feszítőfa. (Két feszítőfa akkor különböző, ha nem pontosan ugyanazon élek alkotják.)

6. A G egyszerű gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Az $x, y \in V(G)$, $x \neq y$ csúcsok pontosan akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $|x-y| \leq 2$. Van-e G-nek olyan feszítőfája, amely
   (a) tartalmazza G-nek az összes olyan $\{x, y\}$ élét, amelyre $x, y \leq 3$ teljesül;
   (b) tartalmazza G-nek az összes olyan $\{x, y\}$ élét, amelyre $|x-y| = 2$ teljesül?

7. Hány feszítőfája van a $K_{2,n}$ teljes páros gráfnak (a gráf csúcsai $a_1, a_2, b_1, b_2, \ldots, b_n$, és tetszőleges $i \in \{1, 2\}$ és $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén az a_i és a b_j csúcs között vezet él)?

8. Igazoljuk, hogy minden összefüggő gráfnak van olyan csúcsa, amelyet elhagyva a gráf összefüggő marad!

9. Adjuk meg az összes olyan 25-csúcsú F fát, amelyre létezik olyan $m \geq 2$ egész, hogy F minden pontjának a foka azonos maradékot ad m-mel osztva.

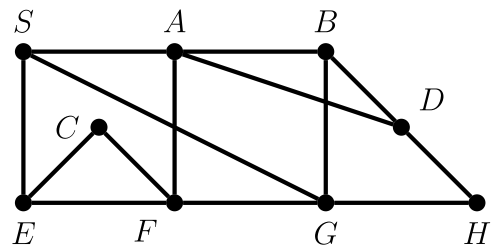
10. Adott a G irányítatlan gráf a következő éllistával:

$\boldsymbol{a}$: b, c;	$\boldsymbol{b}$: a, d;	$\boldsymbol{c}$: a, d;	$\boldsymbol{d}$: b, c, e, f;
$\boldsymbol{e}$: d, f, g;	$\boldsymbol{f}$: d, e, g, h;	$\boldsymbol{g}$: e, f, h;	$\boldsymbol{h}$: f, g.

Keressünk G-ben a-ból kiinduló szélességi feszítőfát! Mennyi lesz a csúcsok a-tól való távolsága?

11. (a) A BFS algoritmus az alábbi gráf csúcsait a következő sorrendben járta be: S, $\square$, $\square$, $\square$, H, $\square$, F, C, $\square$. Egészítsük ki a sorozatot a hiányzó csúcsok neveivel és adjuk meg a bejáráshoz tartozó BFS-fát.

    (b) Tartalmazhatja-e a $\{D, H\}$ élet a gráf egy S-ből indított tetszőleges BFS bejárásához tartozó BFS-fája?



12. Legyen G egyszerű, irányítatlan gráf, a és b pedig G két különböző csúcsa. Igaz-e, hogy ha G-nek egy, az a-ból indított szélességi bejárása a b csúcsot ötödiknek találja meg, akkor biztosan létezik G-nek olyan, b-ből indított szélességi bejárása, mely az a csúcsot ötödiknek találja meg?

13. A G összefüggő gráfban minden pont foka 3. Az s csúcsából indított BFS algoritmus a v csúcsot 13.-ként éri el (az elsőnek elért csúcs s). Előfordulhat-e, hogy v távolsága s-től

    (a) 2; (b) 3; (c) 8?

14. (a) Tervezzünk olyan algoritmust, amely egy adott G gráf és $e \in E(G)$ él esetén eldönti, hogy G-ben van-e e-t tartalmazó kör és ha igen, akkor megtalálja az ilyen körök közül a legrövidebbek egyikét.

    (b) Mi a helyzet akkor, ha adott él helyett egy adott $v \in V(G)$ csúcsot tartalmazó legrövidebb kört kell találnunk?

15. Egy összefüggő G gráf egy F feszítőfáját nevezzük a gráf v csúcsára illeszkedőnek, ha G-nek van olyan, a v csúcsból indított BFS bejárása, amihez tartozó BFS-fa éppen F. Legfeljebb hány éle lehet egy 100 csúcsú G összefüggő gráfnak, ha van olyan feszítőfája, ami G minden csúcsára illeszkedik?